$\sqrt{\text{ΘΕΜΑΤΑ}}$

$\int$ ΕΞΕΤΑΣΕΩΝ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

Θέματα Εξετάσεων στα Μαθηματικά από την Ρουμανία.

Τεύχος 1

Περιέχει τα Θέματα και τις Λύσεις

Κατάλληλο για Διαγωνισμούς

Επιμέλεια : Μιχαηλίδης Κωνσταντίνος

Μαθηματικός ΠΕ03 , Msc

Θεσσαλονίκη , 2010

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ**
13.02.2010

CLASA a V-a

1.Într-o familie sunt trei copii: Alexandru, Ionel şi Cristina. Alexandru este cu un an mai mic decât Ionel, iar Ionel este cu 2 ani mai mare decât Cristina. Ce vârstă are în prezent fiecare copil, dacă acum un an, suma vârstelor lor a fost de 12 ani.

2. Comparaţi numerele:

$$a = 2^{2010} - 2^{2009} - 2^{2008}$$
$$b = 3^{1256} - 2\cdot 3^{1255}$$

3. Determinaţi toate numerele naturale care împărţite la 2010 dau restul de 700 de ori mai mare decât câtul.

(prelucrare RMT /2009)

4. Fie n un număr natural nenul. Arătaţi că numărul 5^n se poate scrie ca:

a) suma a două pătrate perfecte nenule;
b) diferenţa a două pătrate perfecte nenule.

(RMT / 2009)

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 6 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

CLASA a V-a
BAREM DE CORECTARE:

1. Observă că diferenţa de vârstă dintre copii este de un an,
în ordine crescătoare: Cristina, Alexandru, Ionel..................1p.
Vârstele copiilor acum un an: n, n+1, n+2............................1p
(În cazul în care elevul a reprezentat grafic problema, se acordă 2 p)
n+(n+1)+(n+2)=12...1p
Obţine n=3, ...1p
În prezent, copii au vârstele:
Cristina: 4 ani...1p
Alexandru: 5 ani...1p
Ionel: 6 ani..1p
(sau orice altă metodă care conduce la soluţie)

2.
$a = 2^{2008}(2^2 - 2 - 1) = 2^{2008}$ 1p
$b = 3^{1255}(3-2) = 3^{1255}$ 1p
$a = 2^{8*251}$...1p
$= (2^8)^{251} = 256^{251}$...1p
$b = 3^{5*251}$...1p
$= (3^5)^{251} = 243^{251}$...1p
$256^{251} > 243^{251}$ 1p

3. Scrie teorema împărţirii cu rest
n = 2010 c +700c...1p
n=2710 c..1p
700c < 2010..1p
$c \leq 2$; $c \in \{0;1;2\}$...1p
Obţine soluţiile: 0; 2710; 5420.......................3p

4. Pentru n = impar, n=2k+1, $k \in N$, scrie $5^n = 5^{2k+1} = 5 * 5^{2k}$=............1p
$=(2^2 + 1^2) * 5^{2k}$= 1p
$= (2 * 5^k)^2 + (5^k)^2$...1p

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

$5 * 5^{2k}=(3^2 - 2^2) * 5^{2k}= (3 * 5^k)^2 - (2 * 5^k)^2$....................................1p

Pentru n = par nenul, n= 2k + 2, k$\in$ N, scrie $5^n=5^{2k+2}==5^2 * 5^{2k}=$
$=(4^2 + 3^2) * 5^{2k}=$..1p
$= (4 * 5^k)^2+(3 * 5^k)^2$..1p
$5^2 * 5^{2k}=(13^2-12^2) * 5^{2k}=(13 * 5^k)^2 - (12 * 5^k)^2$..................................1p

Obs. Dacă elevul a găsit un caz particular ***şi*** *pentru sumă* ***şi*** *pentru diferenţă se va acorda 1 p, altfel 0 p.*

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

CLASA a VI-a

1. Aflaţi x din proporţia:

$$\frac{14}{\frac{x}{2009}} = \frac{n}{287}\text{ , unde } n = 2010^2 - 2010 - 2009$$

2. Determinaţi elementele mulţimii $M = \left\{ \overline{abc} \;\middle|\; \frac{\overline{ab}}{12} = \frac{\overline{bc}}{23} = \frac{\overline{ca}}{31} \right\}$

RMT /2009

3. Se consideră unghiul xOy ascuţit. Pe latura (Ox se iau punctele A şi C, iar pe latura (Oy se iau punctele B şi D astfel încât $[OA] \equiv [OB]$ şi $[OC] \equiv [OD]$. Dreptele AD şi BC se intersectează în E. Demonstraţi că ΔAEC şi ΔBED sunt triunghiuri congruente.

4. Fie $A_0, A_1, A_2, ..., A_k$ puncte coliniare, în această ordine. Segmentul $A_0A_1 = 1$, $A_1A_2 = 2$, $A_2A_3 = 3$ şi aşa mai departe, fiecare segment este cu o unitate mai lung decât segmentul precedent. Dacă MN = 60, unde M este mijlocul segmentului $[A_0A_1]$ şi N este mijlocul segmentului $[A_{k-1}A_k]$, aflaţi lungimea segmentului $[A_0A_k]$.

<u>Notă :</u>
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 2 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VI-a

1. Calculează şi află n=2009^2 ………………………2p

Înlocuieşte $\frac{14}{\frac{x}{2009}}=\frac{2009^2}{287}$ ………………...........1p

Exprimă $\frac{x}{2009}\times 2009^2=14\times 287$ ……………… 2p

Calculează şi află x=2…………………………........2p

2. $\frac{10a+b}{12}=\frac{10b+c}{23}=\frac{10c+a}{31}=$ …………………………………………....1p.

$=\frac{100a+10b}{120}=\frac{(100a+10b)-(10b+c)}{120-23}=\frac{100a-c}{97}$ ………………..…....1p

Din $\frac{10c+a}{31}=\frac{100a-c}{97}$ obţine 3100a-31c=970c+97a, de unde c=3a……......1p.

Înlocuieşte c=3a în prima relaţie şi obţine b=2a..1p

Cum c este cifră, a$\in\{1,2,3\}$; pentru a =1 obţine b = 2,c = 3,

pentru a = 2 obţine b = 4, c = 6; pentru a = 3 obţine b = 6, c = 9.

M={123, 246, 369}... 3p

3.Realizează corect desenul.................................1p

[BD]$\equiv$[AC]...1p

Demonstrează că $\Delta OAD\equiv\Delta OBC$ 3p

Demonstează că $\Delta BED\equiv\Delta AEC$ 2p

4. Exprimă $A_0A_k= A_0A_1+ \ldots+A_{k-1}A_k =$ ………..1p

= 1+2+3+...+k= $\frac{k(k+1)}{2}$ 1p

$A_0M=\frac{1}{2}$; $NA_k=\frac{k}{2}$ 1p

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MN=$\frac{k(k+1)}{2}-\frac{1}{2}-\frac{k}{2}=\frac{k^2-1}{2}$ 1p

Din $\frac{k^2-1}{2}=60$ obţine $k^2=121$...........................1p

k=11..1p

A_0A_k=66...1p

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

CLASA a VII-a

1) Fie ABC un triunghi isoscel, având AB=AC=15 cm, iar BC=12cm. Punctul E$\in (AB)$ astfel încât AE=5cm, G$\in (BC)$ şi GC=8cm. Demonstraţi că GE||AM, unde AM este înălţimea triunghiului ABC, M$\in (BC)$.

2) Fie a, b, c $\in$ **Z*** astfel încât $\dfrac{a^2+b^2}{c^2}=\dfrac{b^2+c^2}{a^2}=\dfrac{c^2+a^2}{b^2}$.

a) Arătaţi că $|a|=|b|=|c|$;

b) Aflaţi numerele a, b, c ştiind că ac-ab=50.

3) Fie ABCD un trapez dreptunghic, AB||CD, AD$\perp$AB, în care AD=AB+CD şi M$\in$ (AD) aşa încât AM=AB.

a) Arătaţi că triunghiul BMC este dreptunghic;

b) Dacă N este mijlocul lui (BC) , MC$\cap$DN={P} şi AN$\cap$MB={Q} atunci MPNQ este dreptunghi.

4) a) Arătaţi că (n+1)(n+2)=n^2+3n+2, pentru n număr natural;

b) Determinaţi mulţimea numerelor naturale n, pentru care numărul s=$\dfrac{1}{3}+\dfrac{n}{2}+\dfrac{n^2}{6}$ este natural.

<u>Notă :</u>

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VII-a

1.AM înălțime la bază în triunghi isoscel $\Rightarrow$ AM mediană **1p**

$\Rightarrow$ BM=CM=$\frac{BC}{2}$=6 cm **1p**

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{1}{3}$ **1p**

$\Rightarrow \frac{GM}{MB}=\frac{1}{3}$ **1p**

$\Rightarrow \frac{AE}{AB}=\frac{GM}{MB}$ **2p**

$\Rightarrow GE \| AM$ **1p**

2.a) $\frac{a^2+b^2}{c^2}=\frac{b^2+c^2}{a^2}=\frac{c^2+a^2}{b^2}=\frac{2a^2+2b^2+2c^2}{a^2+b^2+c^2}=2$ **1p**

$a^2+b^2=2c^2$ și analoagele **1p**

Scăzând relațiile sau înlocuind se obține $a^2=b^2=c^2$ **1p**

Rezultă $|a|=|b|=|c|$ **1p**

b) ac-ab=50 $\Leftrightarrow$ a(c-b)=50;$|b|=|c|$ implică b=c sau b= -c **1p**

cazul b=c nu convine $\Rightarrow$ b= -c $\Rightarrow$ 2ac=50 $\Rightarrow$ ac=25 **1p**

din $|a|=|c|$ și ac=25 avem a=c $\Rightarrow$ a^2=25 $\Rightarrow$ a=c=5 și b= -5 sau a=c= -5 și b=5 **1p**

3. a) triunghiul ABM este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $m(\langle AMB)=45^0$ **1p**

triunghiul DCM este dreptunghic isoscel $\Rightarrow$ $m(\langle DMC)=45^0$ **1p**

$\Rightarrow$ $m(\langle BMC)=90^0$, deci triunghiul BMC este dreptunghic **1p**

b) MN mediană la ipotenuză în triunghiul BMC $\Rightarrow$ MN=BN=CN **1p**

DM=DC și NM=NC $\Rightarrow$ ND mediatoare pentru (MC) $\Rightarrow$ ND$\perp$MC **1p**

Analog AN$\perp$BM **1p**

Patrulaterul MPNQ are trei unghiuri drepte, deci este dreptunghi **1p**

4. a) calcul direct **2p**

b) s=$\frac{n^2+3n+2}{6}$ **1p**

<u>**Notă :**</u>
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

folosind a) avem s=$\frac{(n+1)(n+2)}{6}$ **1p**

s număr natural $\Rightarrow$ 6 divide (n+1)(n+2); cum n+1 și n+2 sunt numere consecutive $\Rightarrow$
2 divide (n+1)(n+2) **1p**

$\Rightarrow$ 3 divide n+1 sau 3 divide n+2 **1p**

$\Rightarrow$ $n \in \mathbf{N} \setminus \{3k \mid k \in \mathbf{N}\}$ **1p**

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

CLASA a VIII-a

1) Fie x, y, z trei numere naturale ce se pot scrie fiecare ca o sumă de două pătrate perfecte. Arătaţi că:

a) xy se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte;
b) xyz se poate scrie ca o sumă de două pătrate perfecte.

2) Fie cubul ABCDA'B'C'D', Q centrul feţei BCC'B' şi P mijlocul muchiei (AB). Fie $DM \perp PC$, $M \in PC$. Arătaţi că:

a) dreapta DM conţine mijlocul segmentului (BC);
b) $QM \perp PC$.

3) Pentru n număr natural, definim mulţimea $A_n = \{x \in \mathbf{R} \mid |x+n-6| \le 3n+4\}$.

a) Scrieţi mulţimea A_1 sub formă de interval;
b) Aflaţi numărul natural n pentru care A_n conţine exact 609 numere întregi.

4) Fie punctele necoplanare A, B, C, D şi M mijlocul lui (AC), N mijlocul lui (MB), P mijlocul lui (NC), iar Q mijlocul lui (PB).

a) Arătaţi că dreapta MP este paralelă cu planul DNQ;
b) Dacă $m(\langle DAQ) = 65^0$ aflaţi măsura unghiului format de dreptele MP şi AD

<u>Notă :</u>
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

BAREM DE CORECTARE
CLASA a VIII-a

1.a) x=a^2+b^2, y=c^2+d^2 **1p**
xy=$(ac)^2+(ad)^2+(bc)^2+(bd)^2$ **1p**
xy=$(ac)^2-2abcd+(bd)^2+(bc)^2+2abcd+(ad)^2$ **1p**
xy=$(ac-bd)^2+(bc+ad)^2$ **1p**
b) fie ac-bd=m şi bc+ad=n $\Rightarrow$ xy=m^2+n^2 şi z=e^2+f^2 **1p**
analog cu punctul a) avem că xyz=$(me-nf)^2+(mf+ne)^2$ **2p**
2. a) Fie BC$\cap$DM={N}
Unghiurile NDC şi PCB sunt congruente **2p**
Se arată cu triunghiuri congruente că N este mijloc pentru (BC) **2p**
b) Din teorema celor 3 perpendiculare obţinem QM$\perp$PC **3p**
3.a) $A_1=\{x\in \mathbf{R} \,\big|\, |x+1-6|\le 3+4\}$ **1p**

$|x-5|\le 7 \iff -7\le x-5\le 7$ **1p**
$\Rightarrow$ x$\in$ [-2; 12] **1p**
$\Rightarrow$ A_1=[-2; 12] **1p**
b) $|x+n-6|\le 3n+4 \iff -3n-4\le x+n-6\le 3n+4 \Rightarrow$ A_n=[-4n+2; 2n+10] **1p**
$\Rightarrow$ 2n+10-(-4n+2-1)=609 **1p**
$\Rightarrow$ n=100 **1p**
4. a) NQ este linie mijlocie în triunghiul BMP **1p**
$\Rightarrow$ NQ||MP şi NQ$\subset$(DNQ) $\Rightarrow$ MP||(DNQ) **2p**
b) MP este linie mijlocie în triunghiul ACN **1p**
$\Rightarrow$ NA||MP şi cum NQ||MP $\Rightarrow$ A, N, Q colineare **1p**
$\Rightarrow$ AQ||MP **1p**
$\Rightarrow$ $m(\langle MP;DA)=m(\langle AQ;DA)=m(\langle DAQ)=65^0$ **1p**

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

Clasa a IX-a

1. a) Să se demonstreze următoarea identitate:

$[x]+\left[x+\frac{1}{3}\right]+\left[x+\frac{2}{3}\right]=[3x]$, dacă x este număr real şi $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real *a*. (Identitatea lui Hermite)

b) Rezolvaţi următoarea ecuaţie pe mulţimea numerelor reale

$$\left[\frac{5x-2}{4}\right]+\left[\frac{15x-2}{12}\right]+\left[\frac{15x+2}{12}\right]=\frac{5x-3}{2}.$$

2. Fie ecuaţiile: $\sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-5}=y$ şi $\sqrt{z+\sqrt{z+11}}=t$, unde x, y, z, t sunt numere naturale şi $x>2$. Arătaţi că $x^2+y^2\le z^2$.

3. Se consideră triunghiul ABC şi punctele D,Q,E cu proprietăţile: $D\in(AB)$, $Q\in(CD)$, $C\in(BE)$ şi $\frac{AB}{AD}=\frac{CQ}{QD}=\frac{BE}{BC}$. Se mai consideră şi punctele F,M astfel încât $CE \parallel DF, DC \parallel FE$, $DE\cap FQ=\{M\}$. Să se arate că $2+\frac{AB}{AD}=\frac{DE}{DM}$.

R.M.T.

4. Şirul de numere reale $(x_n)_{n\ge1}$ verifică $x_1=2$ şi $x_{n-1}=1+\sqrt{x_n-x_{n-1}}$, $n\ge2$. Să se arate că:

a) $x_n=1+x_1x_2\dots x_{n-1}, \forall\, n\ge2.$

b) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n-1}=1, \forall\, n\ge2.$

c) $\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots+\frac{1}{x_{n-1}}+\frac{1}{x_n}<1, \forall\, n\ge2.$

G.M. 5 (2009) (enunţ parţial modificat)

<u>**Notă :**</u>

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Barem de corectare Clasa a IX-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

Problema 1.

a) $\{x\} \in \left[0, \frac{1}{3}\right) \Rightarrow [3x] = 3[x]$, $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x]$, $\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x] \Rightarrow$

$[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

(1p)

$\{x\} \in \left[\frac{1}{3}, \frac{2}{3}\right) \Rightarrow [3x] = 3[x] + 1$, $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x]$,

$\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x] + 1 \Rightarrow$ $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

(1p)

$\{x\} \in \left[\frac{2}{3}, 1\right) \Rightarrow [3x] = 3[x] + 2$, $\left[x + \frac{1}{3}\right] = [x] + 1$,

$\left[x + \frac{2}{3}\right] = [x] + 1 \Rightarrow$ $[x] + \left[x + \frac{1}{3}\right] + \left[x + \frac{2}{3}\right] = [3x]$

(1p)

b) $\alpha = \frac{5x-2}{4} \Rightarrow \frac{15x-2}{12} = \alpha + \frac{1}{3}$, $\frac{15x+2}{12} = \alpha + \frac{2}{3}$,

(1p)

aplicarea egalităţii lui Hermite

(1p)

rezolvarea ecuaţiei: $\left[\frac{3(5x-2)}{4}\right] = \frac{5x-3}{2}$

(2p)

Problema 2.

Deoarece dacă $a, b \in N$ şi $\sqrt{a} + \sqrt{b} \in N \Rightarrow \sqrt{a} \in N$ şi $\sqrt{b} \in N$ putem spune că:

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
Barem de corectare Clasa a IX-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

$\begin{cases} 2x+3 \in N \\ 2x-5 \in N \\ \sqrt{2x+3}+\sqrt{2x-5} \in N \end{cases}$ (1p)

$\begin{cases} \sqrt{2x+3} = a \in N \\ \sqrt{2x-5} = b \in N \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2x+3 = a^2 \\ 2x-5 = b^2 \end{cases} \Rightarrow a^2-b^2=8 \Rightarrow (a+b)(a-b)=8 \Rightarrow \begin{cases} a+b=4 \\ a-b=2 \end{cases}$

$\begin{cases} a=3 \\ b=1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x=3 \\ y=4 \end{cases}$ (1p)

Avem ecuaţia: $\sqrt{z+\sqrt{z+11}}=t$, unde $z,t \in N$ $\Rightarrow z+\sqrt{z+11}=t^2, \sqrt{z+11}=t^2-z$ (1p)

Notăm:

$\sqrt{z+11}=k \in N \Rightarrow z+11=k^2 \Rightarrow z = k^2-11 \Rightarrow k^2-11+k=t^2$ (1p)

(înmulţim cu 4 egalitatea)$\Rightarrow 4k^2+4k-44=4t^2 \Rightarrow 4k^2+4k+1-4t^2=45 \Rightarrow$

$(2k+1)^2-(2t)^2=45 \Rightarrow (2k+2t+1)(2k-2t+1)=45$

(1p)

Ca urmare avem cazurile:

I. $\begin{cases} 2k+2t+1=45 \\ 2k-2t+1=1 \end{cases} \Rightarrow k=11 \Rightarrow z=110 \Rightarrow x^2+y^2<z^2, (3^2+4^2<110^2)$

(1p)

II. $\begin{cases} 2k+2t+1=15 \\ 2k-2t+1=3 \end{cases} \Rightarrow k=4 \Rightarrow z=5 \Rightarrow x^2+y^2<z^2, (3^2+4^2<5^2)$

(1p)

Deci în condiţiile problemei avem $x^2+y^2 \le z^2$.

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

Barem de corectare Clasa a IX-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

Problema 3.

$\overrightarrow{AB} = m \cdot \overrightarrow{AD}, \overrightarrow{CQ} = m \cdot \overrightarrow{QD}, \overrightarrow{BE} = m \cdot \overrightarrow{BC}$ şi $\overrightarrow{FQ} = \frac{1}{1+m}\overrightarrow{FC} + \frac{m}{1+m}\overrightarrow{FD} = \overrightarrow{FD} + \frac{1}{1+m}\overrightarrow{FE}$

(3p)

$\overrightarrow{DE} = p \cdot \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{ME} = (p-1) \cdot \overrightarrow{DM}, \overrightarrow{FM} = \frac{1}{p}\overrightarrow{FE} + \frac{p-1}{p}\overrightarrow{FD}$

(3p)

Punctele F, M, Q sunt coliniare dacă şi numai dacă $p = m + 2.$

(1p)

Problema 4.

a) Au loc relaţiile: $(x_{n-1} - 1)^2 = x_n - x_{n-1}$

$x_n - 1 = x_{n-1}(x_{n-1} - 1) = x_{n-1}x_{n-2}(x_{n-2} - 1) = \cdots = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1(x_1 - 1) = x_{n-1}x_{n-2} \dots x_1$

(inducţie matematică) (3p)

b)

$\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \underbrace{\frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{1 + x_1 x_2 \dots x_{n-2}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-2}} + \frac{x_{n-1}}{x_1 x_2 \dots x_{n-1}} = \cdots = 1$

(2p)

c) $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1}} + \frac{1}{x_n - 1} = 1$ (2p)

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

Clasa a X- a

1)Să se rezolve in $\mathbf{R^3}$ sistemul de ecuaţii:

$$\begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{25}{4} + 9\left(\frac{25}{36}\right)^z \\ 6\left(\frac{3}{4}\right)^y = \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{4}\right)^x \\ 15\left(\frac{5}{6}\right)^z = \frac{9}{4} + 4\left(\frac{9}{16}\right)^y \end{cases}$$

***

2. a)Demonstraţi că dacă $z \in \mathrm{C} \setminus R$ şi $\mathrm{Im}\dfrac{1+z+z^2}{1-z+z^2} = 0$, atunci $|z| = 1$

b) Calculaţi suma $S = z + z^2 + ... + z^{2010}$ dacă $z = \cos\dfrac{2\pi}{2011} + i\sin\dfrac{2\pi}{2011}$

***

3)Se consideră patrulaterul convex ABCD, iar E, F, mijloacele diagonalelor [AC], [BD]. Să se arate ca are loc relaţia:

$$AB^2+BC^2+CD^2+DA^2=AC^2+BD^2+4EF^2$$

***

4)Există funcţii injective f:[0,∞)→R astfel încât $f(x) + f(\sqrt{x}) + f(x^2) = 2009$, ∀ x>0?

G.M 5

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ | **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

Clasa a X- A

Barem de corectare

1) Substituţiile: $\left(\frac{1}{2}\right)^x = a$, $\left(\frac{3}{4}\right)^y = b$, $\left(\frac{5}{6}\right)^z = c$ 1p

Obţinerea sistemului echivalent $\begin{cases} 4a = 25 + 36c^2 \\ 24b = 1 + 4a^2 \\ 60c = 9 + 16b^2 \end{cases}$ 1p

Prelucrarea lui $\begin{cases} 4a - 60c = (5 - 6c)^2 \\ 24b - 4a = (1 - 2a)^2 \\ 60c - 24b = (3 - 4b)^2 \end{cases}$ 1p

Suma $(1 - 2a)^2 + (3 - 4b)^2 + (5 - 6b)^2 = 0$ 1p

$$\begin{cases} 1 - 2a = 0 \\ 3 - 4b = 0 \\ 5 - 6c = 0 \end{cases} \overset{1p}{\Leftrightarrow} \begin{cases} a = \frac{1}{2} \\ b = \frac{3}{4} \\ c = \frac{5}{6} \end{cases} \overset{1p}{\Leftrightarrow} \begin{cases} \left(\frac{1}{2}\right)^x = \frac{1}{2} \\ \left(\frac{3}{4}\right)^y = \frac{3}{4} \\ \left(\frac{5}{6}\right)^z = \frac{5}{6} \end{cases} \Leftrightarrow \text{x=y=z=1}$$ 1p

2. a) Dacă $u = \frac{1 + z + z^2}{1 - z + z^2}$ şi Im u=0 $\Leftrightarrow |z| = 1$ 3p

b) $1 + S = 1 + z + z^2 + ... + z^{2010} = \frac{z^{2010} - 1}{z - 1} = 0 \Leftrightarrow$ S= -1 4p

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

3)Se asociază fiecarui punct afixul său $A(a)$, $B(b)$, $C(c)$, $D(d)$, $E\left(\frac{a+c}{2}\right)$, $F\left(\frac{b+d}{2}\right)$ 2p

Relaţia este $|b-a|^2+|c-b|^2+|d-c|^2+|a-d|^2=|c-a|^2+|d-b|^2+4\left|\frac{a+c}{2}-\frac{b+d}{2}\right|^2$

Se ţine cont că $z\cdot\overline{z}=|z|^2$ 2p

Se fac calculele. 3p

4) Funcţia *f* nu este injectivă ∃ x, y Є [0, ∞) astfel încat *f(x)=f(y)* dar x≠y 2p

Iau x=3 si y=9 (alegerea celor doua valori)
3p

$f(3)+f(\sqrt{3})+f(3^2)=2009=f(9)+f(\sqrt{9})+f(81)$
Rezultă $f(\sqrt{3})=f(81)$
Deci nu există funcţii cu proprietatea din enunţ 2p

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

CLASA A XI-A

1) Să se afle limitele:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\cdot\cos nx}{x^2}$; $n\in N^*, dat$

b) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\dfrac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[m]{1-x}}{x}$; $n,m\in N\ n\geq 2, m\geq 2$

2) Fie A, B $\in$ M_{2n} (C) matrici inversabile cu $A\cdot B^{-1}+A^{-1}\cdot B=I_{2n}$.

Să se demonstreze că: det(A-B) ^{2} $\cdot$ det $\left[(A^{-1})^2+\left(B^{-1}\right)^2\right]=1$

(G.M.B.)

3) Se consideră funcţia f: R $\to$ R unde:

f(x) = $\sqrt[3]{x^3+(a+2)\cdot x^2+(b+1)\cdot x+c}-\sqrt[3]{x^3+(m+1)\cdot x^2+mx+1}$

Să se determine funcţia ştiind că sunt îndeplinite condiţiile:

i) $\lim\limits_{x\to\infty}\left(a\cdot\sqrt{x^2+ax}+b\cdot\sqrt{x^2+bx}-2x)\right)=1$

ii) c = $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2^2+3^3+\ldots.+n^n}{n^n}$

iii) m = $\lim\limits_{n\to\infty}(\sqrt{n+3\cdot\sqrt{n+1}}-\sqrt{n+5\cdot\sqrt{n+1})}$

4) Fie A$\in$ M_3 (R) cu toate elementele egale cu 1 sau cu -1. Să se arate ca 4 divide det A
Generalizare

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ

BAREM DE CORECTARE Clasa a XI-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

1) a) Dacă n=1 $\Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{2\cdot\sin^2\frac{x}{2}}{x^2}=\frac{1}{2}=\frac{1}{2}\cdot 1^2$ (1p)

$$\boxed{\begin{aligned}&n=2 \Rightarrow \lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x+\cos x-\cos x\cdot\cos 2x}{x^2}=\\&=\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x}{x^2}+\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos 2x}{x^2}=\frac{1}{2}+2=\frac{5}{2}=\frac{1}{2}(1^2+2^2)\end{aligned}}$$

(1p)

Vom demonstra prin metoda inductiei matematice propozitia:

p(n): $\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos x\cdot\cos 2x\cdot\ldots\ldots\cdot\cos nx}{x^2}=\frac{1}{2}\cdot(1^2+2^2+\ldots..n^2)$, $(\forall)n\in\mathbf{N}^*$............................1p.

b)Avem $\lim_{x\to 1}\left(\frac{\sin x}{\sin 1}\right)^{\frac{1}{x-1}}=\lim_{x\to 1}\left(1+\frac{\sin x}{\sin 1}-1\right)^{\frac{1}{x-1}}=$

$\lim_{x\to 1}\left[\left(1+\frac{\sin x-\sin 1}{\sin 1}\right)^{\frac{\sin 1}{\sin x-\sin 1}}\right]^{\left[\frac{\sin x-\sin 1}{\sin 1}\cdot\frac{1}{x-1}\right]}$ 1p

$=e^{\frac{2}{\sin 1}\cdot\lim_{x\to 1}\frac{\sin\frac{x-1}{2}\cdot\cos\frac{x+1}{2}}{x-1}}=e^{\frac{2}{\sin 1}\cdot\frac{1}{2}\cdot\cos 1}$, deci L=$e^{ctg 1}$ 1p

c)Avem

$\lim_{x\to 0}\frac{\sqrt[n]{1+x}-\sqrt[m]{1-x}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-(1-x)^{\frac{1}{m}}}{x}=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1-(1-x)^{\frac{1}{m}}+1}{x}$ 1p

$=\lim_{x\to 0}\frac{(1+x)^{\frac{1}{n}}-1}{x}+\lim_{x\to 0}\frac{(1-x)^{\frac{1}{m}}-1}{-x}=\frac{1}{n}+\frac{1}{m}$, deci L $=\frac{m+n}{m\cdot n}$ 1p

2). Prin înmulţirea relaţiei $A\cdot B^{-1}+A^{-1}\cdot B=I_{2n}$ cu A la stânga, respectiv cu B la dreapta obţinem $A^2+B^2=AB$, de unde $(A-B)^2=-BA$ 1p

Analog prin înmulţirea cu A^{-1} la stânga şi cu B^{-1} la dreapta în relaţia iniţială obţinem $(A^{-1})^2+(B^{-1})^2=A^{-1}\cdot B^{-1}=(BA)^{-1}$ 1p

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
BAREM DE CORECTARE Clasa a XI-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

Cum $(A-B)^2 \cdot \left[(A^{-1})^2+(B^{-1})^2\right]=-(BA)\cdot(BA)^{-1}=-I_{2n}$, prin trecere la determinanţi obţinem: det (A-B) $^2 \cdot \det\left[(A^{-1})^2+(B^{-1})^2\right]=1$ 3p

3) i. Avem $\lim\limits_{x\to\infty} x(a\cdot\sqrt{1+\frac{a}{x}}+b\cdot\sqrt{1+\frac{b}{x}}-2)\in R \Rightarrow \infty\cdot(a+b-2)\in R$

Dacă a+b-2>0 $\Rightarrow \infty\cdot(a+b-2)=\infty\notin R$
Dacă a+b-2<0 $\Rightarrow \infty\cdot(a+b-2)=-\infty\notin R$

Deci a+b=2 si atunci avem $\lim\limits_{x\to\infty} x[(a\cdot\sqrt{1+\frac{a}{x}}-a)+(b\cdot\sqrt{1+\frac{b}{x}}-b)]=1\Rightarrow$

$$\Rightarrow \lim_{x\to\infty}\frac{a\cdot(\sqrt{1+\frac{a}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}+\lim_{x\to\infty}\frac{b\cdot(\sqrt{1+\frac{b}{x}}-1)}{\frac{1}{x}}=1$$

Deci $\lim\limits_{x\to\infty} a\cdot\dfrac{(1+\frac{a}{x})^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x}}\cdot a+\lim\limits_{x\to\infty} b\cdot\dfrac{(1+\frac{b}{x})^{\frac{1}{2}}-1}{\frac{1}{x}}\cdot b=1$ sau $a^2+b^2=2$ (1 p)

Atunci avem $\begin{cases} a+b=2 \\ a^2+b^2=2 \end{cases}$ => a=b=1 (1 p)

ii) Avem sirurile (u_n): $u_n=1+2^2+...+n^n$
(v_n): $v_n=n^n$

Avem 1. $v_n=n^n>0$, $\forall n\in N^*$
2. $\lim\limits_{n\to\infty} v_n=\infty$
3. $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_{n+1}-u_n}{v_{n+1}-v_n}=1$ (1 p)

Atunci pe baza lemei lui Stolz Cesaro avem:

$\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{u_n}{v_n}=1$ => c = 1. (1 p)

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ
BAREM DE CORECTARE Clasa a XI-a

ETAPA LOCALĂ
13.02.2010

iii) Avem $m=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n+3\sqrt{n+1}-n-5\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+3\sqrt{n+1}}+\sqrt{n+5\sqrt{n+1}}}$ (1p)

Atunci $m=\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{-2}{\sqrt{\dfrac{n}{n+1}+3\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}+\sqrt{\dfrac{n}{n+1}+5\dfrac{1}{\sqrt{n+1}}}}$, sau m = -1 (1p)

Înlocuind obtinem funcţia:
f:R->R, f(x)=$\sqrt[3]{x^3+3x^2+2x+1}-\sqrt[3]{x^3-x+1}$

4) Se adună prima linie la a doua şi a treia. (2p)
Se dă factor comun pe linia a doua şi a treia şi se obţine 4. (2p)

Generalizare: A$\in M_3(R) \Rightarrow 2^{n-1}\,|\det A$ (3p)

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII, TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

Clasa a XII-a

1. Într-un grup $(G,\cdot)$ de ordin 6 şi element neutru e se consideră elementele $a, b, a \neq e, b \neq e$, astfel încât $a^3 = e, b^2 = e$. Fie $c = ab$.

a) Arătaţi că $c = ba^2$ sau $c = ba$.

b) Calculaţi ordinal lui c când $c = ba^2$ respectiv $c = ba$.

R.M.T.

2. Să se arate că:

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{sin^{2009}x + cos^2 x}{sin^{2009}x + cos^{2009}x + 1}dx < \lim_{n\to\infty} n\int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{sinx}{x^2}dx.$$

3. Determinaţi primitivele funcţiei: $f:(0,\infty)\to$R, $f(x) = 2\dfrac{x - arctgx}{(1+x^2)^2(arctgx)^3}$.

4. Fie A un inel şi funcţia $f : A\times A \to A$ definită prin $f(x,y) = (xy)^2 - x^2y^2$.

a) Calculaţi valoarea expresiei:

$E(x,y) = f(1+x,1+y) - f(1+x,y) - f(x,1+y) + f(x,y)$, unde 1 este elementul unitate al inelului A.

b) Dacă inelul A are proprietatea că $x + x = 0$ implică $x = 0$ şi dacă $(x,y)^2 - 2(y,x)^2 = x^2y^2 - y^2x^2, \forall x, y \in A$, atunci A este comutativ.

Notă :

- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

MINISTERUL EDUCAŢIEI, CERCETĂRII,
TINERETULUI ŞI SPORTULUI

SOCIETATEA DE ŞTIINTE MATEMATICE

INSPECTORATUL ŞCOLAR JUDEŢEAN BIHOR

OLIMPIADA NAŢIONALĂ DE MATEMATICĂ **ETAPA LOCALĂ 13.02.2010**

BAREM DE CORECTARE
Clasa a XII-a

XII.1. a) $ord\ a = 3, ord\ b = 2$; elementele e, a, a^2, b sunt distincte (e, a, a^2 nu au ordinul 2) (2p)

Elementele b, ba, ba^2 sunt distincte şi fiecare dintre acestea este diferit de $, a, a^2$. Rezultă $G = \{e, a, a^2, b, ba, ba^2\}$. (2p)

Deoarece c este diferit de $e, a, a^2, b,$ deducem $c \in \{ba, ba^2\}$ (1p)

b) Dacă $c = ba^2$, atunci $c^2 = e$ şi $ord\ c = 2$. Dacă $c = ba$, atunci $c^2 = a^2 \neq e; c^3 = b \neq e;\ c^4 = a \neq e;\ c^5 = ba^2 \neq e;\ c^6 = e$ şi $ord\ c = 6$. (2p)

XII.2. Notăm $I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^{2009} x + \cos^2 x}{\sin^{2009} x + \cos^{2009} x + 1} dx$ şi $J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^{2009} x + \sin^2 x}{\sin^{2009} x + \cos^{2009} x + 1} dx$. (1p)

Atunci $I + J = \frac{\pi}{2}$ şi $x = \frac{\pi}{2} - t$ conduce la $I = J$, deci $I = \frac{\pi}{4}$. (2p)

Dacă $x \in \left[\frac{1}{n+1}, \frac{1}{n}\right]$, avem: $n^2 \sin x \leq \frac{\sin x}{x^2} \leq (n+1)^2 \sin x$;

$n^2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin x dx \leq \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx \leq (n+1)^2 \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \sin x dx$;

$2n^3 \sin \frac{1}{2n(n+1)} \sin \frac{2n+1}{2n(n+1)} \leq n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx \leq 2(n+1)^2 n \sin \frac{1}{2n(n+1)} \sin \frac{2n+1}{2n(n+1)}$;

Obţinem $\lim_{n \to \infty} n \int_{\frac{1}{n+1}}^{\frac{1}{n}} \frac{\sin x}{x^2} dx = 1$. (3p) Avem $\frac{\pi}{4} < 1$. (1p)

XII.3. Fie $t = arctgx$. Atunci $x = tgt$, $dt = \frac{1}{1+x^2}dx$, $1+x^2 = 1+tg^2 t = \frac{1}{\cos^2 x}$. (1p)

Avem de calculat: $2\int \frac{tgt - t}{\frac{1}{\cos^2 t} t^3} dt = 2\int \frac{\sin t \cos t - t\cos^2 t}{t^3} dt$ (2p)

Folosim integrarea prin părţi :

$$2\int \left(\sin t \cos t - t\cos^2 t\right)\left(-\frac{1}{2t^2}\right)' dt = \frac{t\cos^2 - \sin t \cos t}{t^2} + \int \frac{2t \sin t \cos t - \sin^2 t}{t^2} dt =$$

$$= \frac{t\cos^2 t - \sin t \cos t}{t^2} + \frac{\sin^2 t}{t} + C = \frac{t - \sin t \cos t}{t^2} + C \qquad (3\text{ p})$$

Rezultă că primitivele căutate sunt: $\frac{arctgx - \frac{x}{1+x^2}}{(arctgx)^2} + C$. (1 p)

Notă :
- toate subiectele sunt obligatorii
- timp de lucru 3 h
- fiecare problemă se notează cu puncte întregi de la 0 la 7

BAREM DE CORECTARE
Clasa a XII-a

XII.4. a) Deoarece $f(x,y)=(xy)^2-x^2y^2=xyxy-xxyy=x(yx-xy)y$, (1p)
se poate scrie:
$f(1+x,y)=(1+x)(yx-xy)y$, $f(x,1+y)=x(yx-xy)(1+y)$,
$f(1+x,1+y)=(1+x)(yx-xy)(1+y)\Rightarrow E(x,y)=yx-xy$ (2 p)

b) Scriind relaţia $(xy)^2-(yx)^2=x^2y^2-y^2x^2$ pentru $x+1$ şi y rezultă prin scădere $xy^2=y^2x$.
(2p)
La fel scriind pentru x şi $y+1$ se obţine $(xy-yx)+(xy-yx)=0$. (1 p)
Din ipoteză rezultă $xy=yx$. (1 p)

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a V- a
13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) **1.** Să se demonstreze că printre oricare şapte numere întregi există două numere a căror diferență este număr par şi divizibil prin 3.

4p) **2.** Aflați toate numerele $x, y, z \in \mathbb{N}$ care verifică relația $3^x + 6^y + 9^z = 731$.

SUBIECTUL II (7p)

Un număr de forma $\overline{abba}$ se numeşte „*înalt*” dacă $a \leq b$ şi se numeşte „*scund*” dacă $a > b$ (de exemplu 1331 este „*înalt*” şi 3113 este „*scund*”).

2p) a) Câte numere „*înalte*” există şi câte „*scunde*”?

3p) b) Câte numere „*înalte*” divizibile cu 3 există?

2p) c) Câte numere „*scunde*” pătrate perfecte există?

SUBIECTUL III (7p)

3p) **1.** Aflați toate numerele naturale de forma $\overline{abcd}$ divizibile cu 21 care sunt pătrate perfecte.

4p) **2.** Arătați că $77777^3 < 22222^3 \cdot 8^2$.

G.M. 2/2009, problema E:13777

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a V- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

1. Diferența este număr par şi divizibil cu 3 $\Rightarrow$ diferența este divizibilă cu 6 ………….1p

Teorema împărțirii cu rest la 6 ………………………. ………………………………1p

Folosirea principiului lui Dirichlet şi finalizare …………………………………... 1p

2. $3^x + 6^y + 9^z \vdots 3$ pentru x, y, z nenule dar 731 nu se divide la 3 …………..……..…… 1p

Demonstrarea faptului că două necunoscute dintre x, y, z sunt nule ……………… .. 1p

Studierea cazurilor $x = y = 0;\ x = z = 0;\ y = z = 0$ şi finalizare ……………..……. 2p

SUBIECTUL II (7p)

a) $\overline{abba}$ sunt exact câte numere de forma $\overline{ab}$, adică 90 ………………….…………1p

$\overline{abba}$ înalt $\Rightarrow$ $a = 1, b \in \{1, 2, ..., 9\}$

$a = 2, b \in \{2, ..., 9\}$

……………

$a = 9, b = 9$

Deci înalte sunt $1 + 2 + ... + 9 = 45$ şi finalizare ………………………….....….. 1p

b) $\overline{abba} \vdots 3 \Leftrightarrow \overline{ab} \vdots 3$ ……………………………………………………..………. 1p

Studierea cazurilor pentru $a = 1, ..., a = 9$ ………………………….………...…. 1p

Finalizare ……………………………………………………………………….……. 1p

c) $\overline{abba}$ scund $\Rightarrow$ $b < a$;

$abba = 1001a + 110b \vdots 11 \Rightarrow \overline{abba} \vdots 11^2$ pentru a fi pătrat perfect …………………..… 1p

$\overline{abba}$ pătrat perfect $\Rightarrow$ $a \in \{0, 1, 4, 5, 6, 9\}$

Tratarea situațiilor în funcție de a şi dem. că nici unul nu este pătrat perfect …….... 1p

SUBIECTUL III (7p)

1. $abcd$ pătrat perfect şi $\overline{abcd} \vdots 21 \Rightarrow \overline{abcd} = 3^2 \cdot 7^2 \cdot k^2, k \in \mathbb{N}$ …………………………. 1p

Determinarea valorilor lui k astfel încât $3^2 \cdot 7^2 \cdot k^2$ să aibă patru cifre ………………1p

Finalizare …………………………...………………………………... 1p

2. $\left.\begin{array}{l} 77777^3 = 7^3 \cdot 11111^3 \\ 22222^3 = 2^3 \cdot 11111^3 \end{array}\right\}$ ……………………………………………………...………. 1p

Compararea numerelor 7^3 şi 8^3 şi finalizare ……………………………………… .. 2p

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

etapa locală

Clasa a VI- a

13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) **1.** Fie x, y numere naturale nenule. Demonstrați că dacă $(x+4y)$ este divizibil cu 7, atunci fracția $\frac{x+4y}{2x+y}$ este reductibilă.

G.M.5/2009, problema E:13830

4p) **2.** O bunică are doi nepoți. Vârsta bunicii se exprimă printr-un număr de două cifre, fiecare cifră fiind vârsta unuia dintre nepoți. Dacă la vârsta bunicii se adaugă vârstele celor doi nepoți se obține 83 de ani. Ce vârstă are bunica?

SUBIECTUL II (7p)

Fie numărul natural $n \in \mathbb{N}^*$. Numărul $a \in \mathbb{N}^*$ se numește „*prietenul lui* n" dacă prin împărțirea lui a la n se obține câtul egal cu restul.

2p) a) Determinați restul împărțirii unui „*prieten al lui* n" la numărul $n+1$.

5p) b) Determinați suma tuturor „*prietenilor numărului* 2010 ".

SUBIECTUL III (7p)

3p) **1.** Demonstrați că oricum am alege 41 de numere naturale nenule diferite a căror sumă nu depășește 1280, există cel puțin două dintre ele a căror sumă este egală cu 41.

4p) **2.** În jurul punctului O se consideră unghiurile $\sphericalangle AOB$, $\sphericalangle BOC$, $\sphericalangle COD$, $\sphericalangle DOE$ și $\sphericalangle EOA$ astfel încât măsurile lor sunt direct proporționale cu cinci numere naturale consecutive. Știind că $\frac{m(\sphericalangle AOB)}{m(\sphericalangle BOE)} = \frac{1}{3}$, demonstrați că punctele A, O și D sunt coliniare.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a VI- a
13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

1. $x+4y\vdots 7$ și 7 număr prim $\Rightarrow$ $\dfrac{x+4y}{2x+y}$ este reductibilă dacă $2x+y\vdots 7$ ……………… 1p

$2x+8y\vdots 7$ ………………………………………………………………………... 1p

$2x+y\vdots 7$ ………………………………………………………………………….. 1p

2. Fie a,b vârstele nepoților

$\overline{ab}+a+b=83$ ………………………………………………………………….. 1p

$11a+2b=83$ …………………………………………………………………….. 1p

Finalizare $a=7,\ b=3$ ……………………………………………………… .. 2p

SUBIECTUL II (7p)

a) a *„prietenul lui n"* $\Rightarrow$ $a=n\cdot c+c,\ c<n$ …………… ……………………………….1p

$a=c(n+1)\Rightarrow$ restul împărțirii la $n+1$ este 0 ………………………………........….. 1p

b) $a=2010c+c,\ c<2010$ ……………………………………………………………… 1p

$a=2011c,\ c<2010,\ c\in\mathbb{N}^*$ ……………………………………………………… 1p

Toți prietenii lui 2010 sunt $1\cdot 2011, 2\cdot 2011, ..., 2009\cdot 2011$ ………………………… 1p

Suma $=(1+2+3+...+2009)\cdot 2001=2009\cdot 1005\cdot 2011$ ……………………….…… 2p

SUBIECTUL III (7p)

1. Fiecare pereche $(1,40),(2,39),(3,38),...,(20,21)$ trebuie să conțină cel mult unul dintre numere …………………………………………………………………………. 1p

Numerele care au suma minimă sunt: $1,2,3,...,20,41,42,...,61$ ………....……………1p

Suma numerelor este 1281. Finalizare ……………………………………………... 1p

2. Notăm măsurile unghiurilor cu a,b,c,d,e. Atunci $a+b+c+d+e=360^\circ$ ………… 1p

$\dfrac{a}{a+e}=\dfrac{1}{3}\Rightarrow e=2a$ ………………………………………………………… .. 1p

$\dfrac{a}{n}=\dfrac{b}{n+1}=\dfrac{c}{n+2}=\dfrac{d}{n+3}=\dfrac{e}{n+4}\Rightarrow n=4$ ………………………………………… 1p

$m(\sphericalangle AOD)=a+b+c=180^\circ$. Finalizare ………………………………………... 1p

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Călinescu Dinu
Prof. Liviu Tiron
Prof. Pancu Codruț

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a VII- a
13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Să se demonstreze că:

$$\frac{x+n}{n+1} \geq \frac{n+3}{2x+n+1}, \forall x \in \mathbb{N}^* \text{ şi } \forall n \in \mathbb{N}.$$

4p) b) Să se determine $x \in \mathbb{N}$ pentru care este verificată egalitatea:

$$\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+\ldots+\frac{x+2009}{2010}=\frac{5}{2x+3}+\frac{6}{2x+4}+\ldots+\frac{2013}{2x+2011}$$

SUBIECTUL II (7p)

Se dau numerele raționale $a_1, a_2, \ldots, a_{2010}$ astfel încât: $a_1=\frac{1}{2}$; $a_2=1-\frac{1}{a_1+1}$;

$a_3=1-\frac{1}{a_1a_2+1}$; … ; $a_{2010}=1-\frac{1}{a_1a_2\ldots a_{2009}+1}$.

Să se arate că:

3p) a) $a_1, a_2, \ldots, a_{2010} > 0$

4p) b) $a_1+a_2+\ldots+a_{2010} < 1$

SUBIECTUL III (7p)

7p) Se dă un triunghi cu laturile de lungimi a, b respectiv c, unde $a, b, c \in \mathbb{N}^*$ şi $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}=1$.

Să se stabilească natura triunghiului ştiind că perimetrul său este un număr impar.

SUBIECTUL IV(7p)

Considerăm triunghiul isoscel ABC $([AB]\equiv[AC])$ cu $[AD]$ mediană şi $(DM$ bisectoarea unghiului ADC unde $M \in AC$. Perpendiculara din D pe AB intersectează pe AC în Q şi pe AB în N. Arătați că:

4p) a) $\left(\frac{AM}{MC}\right)^2=\frac{AN}{NB}$;

3p) b) triunghiul MDQ este isoscel.

G.M. 7-8-9/2009, problema E:13785

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a VII- a
13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) $x+n\geq n+1, \forall x\in \mathbb{N}^*$	1p
$2x+n+1\geq n+3, \forall x\in \mathbb{N}^*$	1p
Finalizare	1p
b) $\frac{x+1}{2}+\frac{x+2}{3}+...+\frac{x+2009}{2010}>2009, \forall x>1$	1p
$\frac{5}{2x+3}+...+\frac{2013}{2x+2011}<2009, \forall x>1$	1p
Pentru $x=0$ raționament analog	1p
$x=1$ soluție unică	1p

SUBIECTUL II (7p)

a) $a_1=\frac{1}{2}>0$; $a_2=1-\frac{1}{a_1+1}=\frac{a_1}{a_1+1}>0$ $a_3=1-\frac{1}{a_1a_2+1}=\frac{a_1a_2}{a_1a_2+1}>0$ ………………..	2p
$a_{2010}=1-\frac{1}{a_1a_2...a_{2009}+1}=\frac{a_1a_2...a_{2009}}{a_1a_2...a_{2009}+1}>0$	1p
b) $a_2=\frac{a_1}{a_1+1}\Rightarrow a_2(a_1+1)=a_1\Rightarrow a_2a_1+a_2=a_1\Rightarrow a_2=a_1-a_1a_2$ $a_3=\frac{a_1a_2}{a_1a_2+1}\Rightarrow a_3(a_1a_2+1)=a_1a_2\Rightarrow a_3=a_1a_2-a_1a_2a_3$ ………………… $a_{2010}=\frac{a_1a_2...a_{2009}}{a_1a_2...a_{2009}+1}\Rightarrow a_{2010}=a_1a_2...a_{2009}-a_1a_2...a_{2009}a_{2010}$	2p
Adunăm relațiile de mai sus şi obținem: $a_1+a_2+...+a_{2010}=2a_1-a_1a_2...a_{2009}a_{2010}=1-a_1a_2...a_{2010}<1$	2p

Subiectul III (7p)

$a+b+c=$ impar$\Rightarrow$ unul sau toate trei impare	1p
Presupun $a\leq b\leq c$ şi studiez cazurile $a=1$ (nu convine) $a=2\Rightarrow \frac{1}{b}+\frac{1}{c}=\frac{1}{2}\Rightarrow b=c=4$ (nu convine) sau $b=3, c=6$ (nu convine deoarece nu verifică inegalitatea triunghiulară)	2p
$a=3\Rightarrow b=c=3\Rightarrow$ triunghi echilateral	1p

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Moscaliuc A.

Dacă $a \geq 4 \Rightarrow b,c > 4 \Rightarrow \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c} < 1 \Rightarrow$ pentru $a \geq 4$ nu mai există situații convenabile	2p
Analog pentru celelalte situații de ordonare a numerelor a,b,c	1p

<u>Subiectul IV</u> (7p)

a) $\frac{AM}{MC} = \frac{AD}{DC}$ (1) **din teorema bisectoarei**	**1p**
$\triangle AND \sim \triangle ADC \Rightarrow \frac{AN}{ND} = \frac{AD}{DC}$ $(2) \Rightarrow$ **din (1) şi (2)** $\frac{AM^2}{MC^2} = \frac{AN^2}{ND^2}$ (3)	**2p**
$\triangle AND \sim \triangle DBN \Rightarrow ND^2 = AN \cdot NB$ **şi finalizare**	**1p**
b) $m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle CDQ) = x \Rightarrow m(\sphericalangle NDB) = m(\sphericalangle BAD) = m(\sphericalangle DAC) = x$	**1p**
DM **bisectoare** $\Rightarrow m(\sphericalangle ADM) = m(\sphericalangle MDC) = 45^\circ$ $\Rightarrow m(\sphericalangle MDQ) = m(\sphericalangle DMQ) = 45^\circ + x$	**2p**

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Moscaliuc A.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
etapa locală
Clasa a VIII- a
13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

3p) a) Să se demonstreze că $\sqrt{\frac{a}{b}}+\sqrt{\frac{b}{a}}\geq 2,\forall a,b\in(0,+\infty)$. În ce situație inegalitatea dată devine egalitate?

3p) b) Să se demonstreze că $\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{a}\geq 3,\forall a,b,c\in(0,\infty)$. În ce situație inegalitatea devine egalitate?

1p) c) Să se rezolve ecuația: $2^x+\left(\frac{2}{3}\right)^x+\left(\frac{3}{4}\right)^x=3$

SUBIECTUL II (7p)

3p) a) Să se calculeze $\left[\sqrt{n^2+n}\right],n\in\mathbb{N}^*$

4p) b) Să se determine ultima cifră a numărului $\left[10\sqrt{n^2+n}\right],n\in\mathbb{N}^*$

SUBIECTUL III (7p)

7p) Fie un paralelipiped dreptunghic cu dimensiunile a,b respectiv c.
Ştiind că $a,b,c\in\mathbb{N}^*$, $ab+bc+ac=abc$ şi $a<b<c$ să se demonstreze că $d+a=b+c$, unde d este lungimea diagonalei paralelipipedului.

SUBIECTUL IV(7p)

7p) Se consideră piramida patrulateră regulată $VABCD$ cu baza $ABCD$ şi un plan α, $\alpha\not\parallel(ABC)$ care intersectează segmentele (VA), (VB), (VC) şi (VD) în punctele M,N,P şi respectiv Q. Arătați că: $\frac{MA}{MV}+\frac{PC}{PV}=\frac{NB}{NV}+\frac{QD}{QV}$.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a VIII- a
13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I (7p)

a) Aplicând $m_a \geq m_g$ obținem $\dfrac{\sqrt{\dfrac{a}{b}}+\sqrt{\dfrac{b}{a}}}{2} \geq 2\sqrt{\sqrt{\dfrac{a}{b}}\cdot\sqrt{\dfrac{b}{a}}}$	2p
Finalizare	0,5p
Egalitate pentru $a=b$	0,5p
b) $\dfrac{a}{b}+\dfrac{b}{c}\geq 2\sqrt{\dfrac{a}{c}}$	1p
$\dfrac{c}{a}+1\geq 2\sqrt{\dfrac{c}{a}}$	1p
Finalizare folosind a) şi determinare condiție de egalitate $a=b=c$	1p
c) $x=0$ soluție unică folosind b)	1p

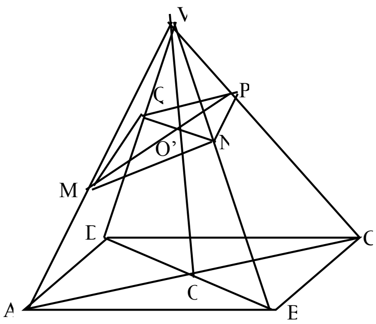
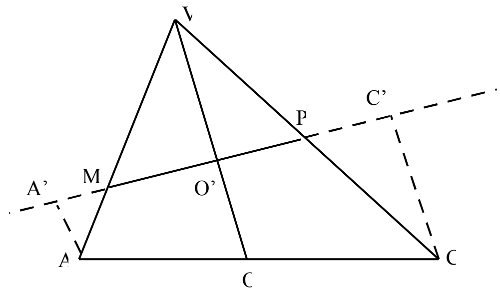
SUBIECTUL II (7p)

a) $n^2 < n(n+1) < (n+1)^2$	1p
$n < \sqrt{n(n+1)} < n+1$	1p
$\left[\sqrt{n(n+1)}\right] = n$	1p
b) $\left(n+\dfrac{2}{5}\right)^2 < n(n+1) < \left(n+\dfrac{1}{2}\right)^2$	2p
$10n+4 < 10\sqrt{n^2+n} < 10n+5$	1p
Ultima cifră a numărului $\left[10\sqrt{n(n+1)}\right]$ este 4.	1p

Subiectul III (7p)	
Relația dată se rescrie $\dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=1$ $a=1$ nu convine	1p
$a=2 \Rightarrow \dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}=\dfrac{1}{2} \Rightarrow b=c=4$ (nu convine) sau $b=3, c=6$	2p
Pentru $a\geq 3 \Rightarrow b,c>3 \Rightarrow \dfrac{1}{a}+\dfrac{1}{b}+\dfrac{1}{c}<1$	2p
Deci $a=2, b=3, c=6 \Rightarrow d=7$	1p
Finalizare	1p

Subiectul IV (7p)

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Pancu Codruț

 	
Considerăm $AC \cap BD = \{O\}$ și $MP \cap NQ = \{O'\}$ În triunghiul $\triangle VAC$ construim paralelele $AA' \parallel VO$ și $CC' \parallel VO$ unde punctele $A', C' \in MP$. În mod evident obținem că $\triangle AA'M \sim \triangle VO'M$ și $\triangle CC'P \sim VO'P$ de unde rezultă egalitățile: $\left.\begin{array}{l} \dfrac{MA}{MV} = \dfrac{AA'}{VO'} \\ \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{CC'}{VO'} \end{array}\right\} \Rightarrow \dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{AA'}{VO'} + \dfrac{CC'}{VO'} = \dfrac{AA' + CC'}{VO'} \quad (1)$	3p
În trapezul $AA'C'C$ avem OO' linie mijlocie, deci $AA' + CC' = 2 \cdot OO' \quad (2)$ Din relațiile (1) și (2) rezultă că: $\dfrac{MA}{MV} + \dfrac{PC}{PV} = \dfrac{2 \cdot OO'}{VO'}$	3p
În mod analog se arată că: $\dfrac{NB}{NV} + \dfrac{QD}{QV} = \dfrac{2 \cdot OO'}{VO'}$ de unde rezultă egalitatea dorită.	1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a IX- a
13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră expresia

$$E(x) = \sqrt{18 + 3x - 8\sqrt{3x + 2}} + \sqrt{11 + 3x - 6\sqrt{3x + 2}}$$

4p) a) Să se afle valorile reale ale lui x pentru care expresia are sens;
3p) b) Să se arate că există un interval pe care expresia este constantă.

SUBIECTUL II (7p)

Se consideră mulțimile $A = \left\{ a_n \middle| a_n = \frac{2n+1}{2n-1}, n \in N^* \right\}$ şi $B = \left\{ b_k \middle| b_k = \frac{2k}{2k-1}, k \in N^* \right\}$.

1p) a) Să se arate că A şi B sunt mulțimi disjuncte;
3p) b) Să se arate că în mulțimea A există trei elemente distincte în progresie aritmetică;
3p) c) Să se că între b_{k+1} şi b_k există două elemente ale mulțimii A.

Prof. Gheorghe Oniciuc

SUBIECTUL III (7p)

Fie triunghiul ABC. Să se arate că:

2p) a) $D \in BC \Leftrightarrow \exists \alpha \in R$ astfel ca $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$;
2p) b) $D \in (BC) \Leftrightarrow \exists \alpha \in (0,1)$ astfel ca $\overrightarrow{AD} = \alpha \overrightarrow{AB} + (1-\alpha)\overrightarrow{AC}$;
3p) c) Dacă $D \in (BC)$ atunci $AD \cdot BC < AB \cdot DC + AC \cdot BD$.

SUBIECTUL IV(7p)

În triunghiul ABC pentru care lungimea laturii AB este diferită de lungimea laturii AC, considerăm M mijlocul laturii BC. Fie P, Q puncte variabile pe $[AB]$ respectiv $[AC]$, astfel ca $BP = CQ$ şi R mijlocul lui (PQ).

5p) a) Să se arate că RM este paralelă cu bisectoarea unghiului BAC;
2p) b) Să se afle locul geometric al punctului R.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a IX- a
13 Februarie 2010
Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) Scrierea de patrate perfecte sub radicali ……………………………..……...................... **2p**

$x \in \left[-\frac{2}{3}, \infty\right)$ ………………………………………………………………. **2p**

b)Scrierea lui E cu moduli ……………………………………………..……… **1p**

Explicitarea modulilor ....………………….. **1p**

Finalizare ....……… **1p**

SUBIECTUL II

a) $a_n = b_k \Rightarrow 2(2k-1) = 2n-1$ Contradictie………………………………………………. **1p**

b) $a_n = \frac{a_m + a_k}{2} \Leftrightarrow (2m-1)(2p-1) = (2n-1)(p+m-1)$...1p

Se deduce ca , de exemplu,n=3,m=2 si p=8 verifica relatia …..2p

c) $b_{k+1} < a_p < b_k$ ………………………………………………………………………… 2p

Se gaseste p=2k si p=2k+1 ……………………………………………………1p

SUBIECTUL III

a) $D \in BC \Rightarrow \overrightarrow{CD}$ este coliniar cu $\overrightarrow{CB}$, deci exista $\alpha \in R$ astfel ca $\overrightarrow{CD} = \alpha \overrightarrow{CB}$ 1P

Finalizare 1p

b) Se ia $\alpha = \frac{CD}{CB} \in (0,1)$............2p

c) $\overrightarrow{AD} = \frac{DC}{BC}\overrightarrow{AB} + \frac{BD}{BC}\overrightarrow{AC}$ 1p

Modulul sumei vectorilor mai mic ca suma modulilor si finalizare............2p

SUBIECTUL IV

a) Fie $\vec{u}$, $\vec{v}$ versorii vctorilor $\overrightarrow{AB}$ *si* $\overrightarrow{AC}$ **si** $\lambda = PB$ *si AD bisectoarea unghiului A, D pe BC.*

$\overrightarrow{RM} = \frac{\lambda}{2}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$ 2p

$\overrightarrow{AD} = \frac{bc}{b+c}\left(\vec{u} + \vec{v}\right)$ 2p

Finalizare 1p

b) Locul geometric este segmentul $[MN]$ cu MN paralel cu AD si N situat pe latura ce mai mare dintre AB si AC...2p

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Gheorghe Oniciuc

Etapa locală a olimpiadei de MATEMATICĂ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a X- a

13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

Se consideră perechile de numere complexe z_1, z_2 pentru care sunt satisfăcute relațiile:

$$i)\ |z_1| = |z_2| = a \in (0, \infty)$$

$$ii)\ \left|z_1^2 + z_1 z_2 + z_2^2\right| = a^2$$

3p) a) Să se demonstreze că dacă $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ atunci $z_1^{2010} + z_2^{2010} \in \mathbb{R}$;

1p) b) Să se demonstreze că dacă $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R}$ atunci $z_1^{2009} + z_2^{2009} = 0$

3p) c) Să se demonstreze că dacă $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ atunci $\left|z_1^{2009} + z_2^{2009}\right| = a^{2009}\sqrt{2}$

Propusă de prof. Daniel Năstruț

SUBIECTUL II (7p)

4p) **1.** Să se arate că $\forall\, n \in \mathbb{N}^*$ are loc egalitatea:

$$\left[\sqrt{n^2 + n + 1} + \sqrt{n^2 - n + 1}\right] = \left[\sqrt{4n^2 + 3}\right]$$

Problema 23962,G. M., pag. 368

3p) **2.** Fie $a, b \in \mathbb{C}^*$ şi funcția $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, f(z) = az + b$. Să se arate că dacă punctele de afixe $f(z_1), f(z_2), f(z_3)$ sunt coliniare, atunci şi punctele de afixe z_1, z_2, z_3 sunt coliniare.

SUBIECTUL III (7p)

Fie $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ care îndeplineşte următoarele condiții:

$$i)\ f(f(n)) = n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$ii)\ f(f(n-2) - 2) = n, \forall\, n \in \mathbb{Z}$$

$$iii)\ f(1) = 0$$

2p) a) Demonstrați că f este bijectivă;

5p) b) Determinați f şi f^{-1}

Propusă de prof. Daniel Poroşniuc

SUBIECTUL IV(7p)

7p) Să se rezolve în $\mathbb{R}$ ecuația:

$$4^x \cdot 9^{\frac{1}{x}} + 9^x \cdot 4^{\frac{1}{x}} + 6^{x + \frac{1}{x}} = 108$$

G. M. 2/2009 – problema 26107

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a X- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I

a) $|z_1|^2 = z_1 \cdot \overline{z_1} = z_2 \cdot \overline{z_2} = |z_2|^2 = a^2$; $\overline{z_1} = \frac{a^2}{z_1}$; $\overline{z_2} = \frac{a^2}{z_2}$;

$\left|z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2\right| = a^2 \Rightarrow \left(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2\right)\left(\overline{z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2}\right) = a^4$

$\left(z_1^2 + z_1z_2 + z_2^2\right)^2 = \left(z_1z_2\right)^2 \Rightarrow \left(z_1 + z_2\right)^2\left(z_1^2 + z_2^2\right) = 0$ ……………………………………2p

Finalizare ……………………………………………………………………………1p

b) $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{R} \Rightarrow z_1 = -z_2$, finalizare……………………………………………………..1p

c) $\frac{z_1}{z_2} \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R} \Rightarrow z_1 = \pm iz_2$ ……………………………………………………...…1p

Finalizare ……………………………………………………………………………2p

SUBIECTUL II

1. $n + \frac{1}{2} < \sqrt{n^2 + n + 1} < n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ………………………………………………….. 1p

$n - \frac{1}{2} < \sqrt{n^2 - n + 1} \le n, \forall n \in \mathbb{N}^*$ ……………………………………………………..... 1p

$2n < \sqrt{4n^2 + 3} < 2n + 1, \forall n \in \mathbb{N}^*$ …………………………………………………… 1p

Finalizare ……………………………………………………………………….... 1p

2. Punctele A, B, C de afixe a, b, c sunt coliniare $\Leftrightarrow \frac{a-b}{b-c} \in \mathbb{R}$ ………………………….. 1p

Fie M_1, M_2, M_3 de afixe z_1, z_2, respectiv z_3 și P_1, P_2, P_3 de afixe $f\left(z_1\right), f\left(z_2\right)$, respectiv $f\left(z_3\right)$.

P_1, P_2, P_3 coliniare $\Rightarrow \frac{f\left(z_1\right) - f\left(z_2\right)}{f\left(z_2\right) - f\left(z_3\right)} \in \mathbb{R}$ …………………………...………………….. 1p

Rezultă $\frac{z_1 - z_2}{z_2 - z_3} \in \mathbb{R} \Rightarrow M_1, M_2, M_3$ coliniare …………………………..……………….. 1p

SUBIECTUL III

f injectivă………………………………………………………………………...…1 p

f surjectivă……………………………………………………………………….... 1 p

$f\left(n-2\right) - 2 = f\left(n\right), \forall n \in \mathbb{Z}$ ……………………………………………..………………1p

$f(2k+1) = -2k = -(2k+1) + 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ ………………………………………………………...2 p

$f(-2k) = -2k + 1, \forall k \in \mathbb{Z}$ ……………………………………………………………………1 p

$f(n) = -n + 1, \forall n \in \mathbb{Z}$ ……………………...0,5 p

$f^{-1} = f$ ……………………………………………… ……………………………… 0,5 p

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Daniel Poroșniuc
Prof. Nicolai Buzdugă

SUBIECTUL IV

Observăm că $x \neq 0$.

Pentru $x < 0$, membrul stâng este mai mic decât 3, deci ecuația nu are soluție …………….. 1p

Pentru $x > 0$, scriem membrul stâng $6^{x+\frac{1}{x}}\left[\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{x}}+1\right]$ …………………………… 2p

Dar $x+\frac{1}{x} \geq 2$, deci $6^{x+\frac{1}{x}} \geq 36$ …………………….……………………………………………….. 1p

$\left(\frac{2}{3}\right)^{x-\frac{1}{x}}+\left(\frac{3}{2}\right)^{x-\frac{1}{x}} \geq 2$ (inegalitatea mediilor), deci membrul stâng este ≥ 3 …………………. 2p

Finalizare, $x = 1$ soluție unică ……………………………………………………………… 1p

Subiecte şi bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Daniel Năstruț
Prof. Liviu Tiron
Prof. Daniel Poroşniuc
Prof. Nicolai Buzdugă

Etapa locală a olimpiadei de MATEMATICĂ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a XI- a

13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

Fie $\sigma = \begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 3\,1\,2 \end{pmatrix} \in S_3$, unde S_3 reprezintă mulțimea permutărilor de gradul 3.

3p) a) Să se rezolve ecuația $x^2 = \sigma$;

4p) b) Să se demonstreze că oricare ar fi ordinea factorilor, produsul tuturor permutărilor din S_3 este permutare impară.

SUBIECTUL II (7p)

Fie $A \in M_3(C)$. Să se arate că:

4p) a) $\det\left(A - A^t\right) = 0$;

3p) b) Daca $A \neq A^t$ atunci rang A=2.

SUBIECTUL III (7p)

Fie șirul $(x_n)_{n\geq 1}$ strict crescător cu proprietatea:

$$x_n^2\left(x_n^2 - 1\right) \geq x_n^3 \cdot x_{n+1} + 2x_n + 1,\ (\forall)n \geq 1.$$

7p) Să se arate că $x_n < -1, (\forall)\ n \geq 1$.

prof. Ioan Băetu

SUBIECTUL IV(7p)

Fie $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = x^3 + x$.

3p) a) Să se verifice că f este bijectivă;

4p) b) Să se calculeze $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f^{-1}(x)}{\sqrt[n]{x}}$, $n \geq 2$.

prof. Ioan Băetu

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

Etapa locală a olimpiadei de MATEMATICĂ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a XI- a

13 Februarie 2010

Barem de corectare

SUBIECTUL I

I. a). Daca $x(1)=1 \Rightarrow x(1)=x(x(1))=\sigma(1)=3$, fals……………………………………………1p

Daca $x(1)=2 \Rightarrow x(2)=x(x(1))=\sigma(1)=3$

Atunci $x(3)=x(x(2))=\sigma(2)=1 \Rightarrow x=\begin{pmatrix} 1\,2\,3 \\ 2\,3\,1 \end{pmatrix}$..... ……………………………………..…1p

Daca $x(1)=3 \Rightarrow x(3)=x(x(1))=\sigma(1)=3$, fals. …. ………………………………..…1p

b) Se stie ca dintre cele 6 permutari ale lui S_3, 3 sunt pare si 3 sunt impare……………2p

Fie $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_6$ cele 6 permutari luate intr-o ordine oarecare. Rezulta :

$\varepsilon(\sigma_1 \cdot \sigma_2 \cdot \sigma_3 \cdot \sigma_4 \cdot \sigma_5 \cdot \sigma_6)=(-1)^{m(\sigma_1)} \cdot (-1)^{m(\sigma_2)}(-1)^{m(\sigma_3)}(-1)^{m(\sigma_4)}(-1)^{m(\sigma_5)}(-1)^{m(\sigma_6)} =$

$=(-1)^{m(\sigma_1)+m(\sigma_2)+m(\sigma_3)+m(\sigma_4)+m(\sigma_5)+m(\sigma_6)}=-1$ …………………………………………………….2p

SUBIECTUL II

a) Fie $B=A-A^t \Rightarrow B^t=A^t-A=-B$ …………………………………………2p

Cum $\det B=\det(B^t) \Rightarrow \det B=\det(-B)=(-1)^3 \cdot \det B=-\det B \Rightarrow \det B=0$ …………2p

b) Fie $A=\begin{pmatrix} a & b & c \\ m & n & p \\ q & r & s \end{pmatrix} \Rightarrow A^t=\begin{pmatrix} a & m & q \\ b & n & r \\ c & p & s \end{pmatrix} \Rightarrow A-A^t=\begin{pmatrix} 0 & b-m & c-q \\ m-b & 0 & p-r \\ q-c & r-p & 0 \end{pmatrix}$………..1p

Din (1) $\Rightarrow \det(A-A^t)=0 \Rightarrow rang(A-A^t) \le 2$ ……………………………………………1p

Daca $rang(A-A^t)<2$, atunci toti minorii diagonali de ordinul 2 din matricea $A-A^t$ sunt 0.

Rezulta $(b-m)^2=(p-r)^2=(c-q)^2=0 \Rightarrow m=b, p=r, c=q \Rightarrow A=A^t$, fals………………….1p

SUBIECTUL III

Din ipoteza rezulta :

(1) $x_n^3(x_{n+1}-x_n) \le -(1+x_n)^2 \le 0, (\forall) n \ge 1$. ……………………………………………..2p

Cum $(x_n)_{n\ge1}$ este strict crescator, rezulta $x_n \le 0, (\forall) n \ge 1 \Rightarrow (x_n)_{n\ge1}$ este convergent………...2p

Fie $l \le 0, l=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Trecand la limita in (1), obtinem:

$l^3(l-l) \le -(l+1)^2 \le 0 \Rightarrow 0 \le -(l+1)^2 \le 0 \Rightarrow l=-1 \Rightarrow x_n<-1, (\forall) n \ge 1$ ………………3p

SUBIECTUL IV

a) $(\forall) x, y \in R$ cu $x<y \Rightarrow x^3<y^3 \Rightarrow x^3+x<y^3+y \Rightarrow f(x)<f(y) \Rightarrow f$ strict crescatoare pe $R \Rightarrow f$ injectiva…………………………………………………………………………..1p

Cum f este continua pe R si $\lim\limits_{x\to-\infty} f(x)=-\infty, \lim\limits_{x\to\infty} f(x)=\infty \Rightarrow \operatorname{Im} f=R \Rightarrow f$ este sujectiva…..2p

b) $(\forall) x>1 \Rightarrow f(\sqrt[3]{x})=x+\sqrt[3]{x}<2x$. ……………………………………………………..1p

Cum f este strict crescatoare pe $R \Rightarrow f^{-1}$ este strict crescatoare pe R.

Rezulta $\sqrt[3]{x}=f^{-1}(f(\sqrt[3]{x}))<f^{-1}(2x) \Rightarrow f^{-1}(x)>\sqrt[3]{\frac{x}{2}}, (\forall) x>2$. …………………………………1p

Cum $\lim\limits_{x\to\infty}\sqrt[3]{\frac{x}{2}}=\infty \Rightarrow \lim\limits_{x\to\infty} f^{-1}(x)=\infty$. ……………………………………………………………1p

Notam $f^{-1}(x)=y$. Rezulta $x=f(y)=y^3+y$, de unde

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Ioan Băetu

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[n]{x}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{\sqrt[n]{y^3+y}}=\lim_{y\to\infty}\frac{y}{y^{\frac{3}{n}}\sqrt[n]{1+\frac{1}{y^3}}}=\lim_{y\to\infty}y^{1-\frac{3}{n}}$$ 1p

Daca $n=3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[n]{x}}=1$. Daca $n>3\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[n]{x}}=\infty$. Daca $n=2\Rightarrow\lim_{x\to\infty}\frac{f^{-1}(x)}{\sqrt[n]{x}}=0$. 1p

Etapa locală a olimpiadei de MATEMATICĂ

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ

Clasa a XII- a

13 Februarie 2010

SUBIECTUL I (7p)

7p) Pe $\mathbb{Q}$ introducem legea "$*$" definită prin $x*y=xy+5x+10y+a$, $a\in\mathbb{Q}$. Să se determine valorile lui a pentru care intervalul $(-5,+\infty)$ este parte stabilă a lui $\mathbb{Q}$ în raport cu legea "$*$".

SUBIECTUL II (7p)

Pe mulțimea $G=[0,1)$ definim legea de compoziție $x*y=\{x+y\}$ (partea fracționară).
Se cere:

5p) a) să se arate că $(G,*)$ este grup abelian;

2p) b) dacă $n\in\mathbb{N}$, $n\geq 2$ şi $G_n=\left\{0,\frac{1}{n},\frac{2}{n},...,\frac{n-1}{n}\right\}$, arătați că $(G_n,*)$ este subgrup al lui $(G,*)$.

SUBIECTUL III (7p)

7p) Arătați că funcția $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}\sin\frac{2}{x^2}, & x\neq 0\\ 0, & x=0\end{cases}$, admite primitive pe $\mathbb{R}$.

SUBIECTUL IV (7p)

Fie funcția $f:[0,1]\to[1,3]$, $f(x)=x^4+x^2+1$. Se admite că funcția f are inversa g.

1p) a) Să se calculeze $\int_0^1 \frac{t(2t^2+1)}{f(t)}dt$.

3p) b) Să se arate că $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^3 g(x)\,dx=3$.

3p) c) Să se demonstreze că, dacă $\alpha\in[1,3]$, atunci are loc inegalitatea $\int_0^1 f(x)\,dx+\int_1^{\alpha} g(x)\,dx\geq\alpha$.

NOTĂ: ***Fiecare subiect este notat cu un punctaj de la 0 la 7 puncte.***
Timp de lucru – 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Clasa a XII - a
13 Februarie 2010
Barem de corectare

SUBIECTUL I

Pentru $(\forall)x>-5,(\forall)y>-5$ trebuie să avem $x*y>-5$ **1p**

$x*y=(x+10)(y+5)+a-50$ **1p**

Aleg șirul $(y_n)_n$, $y_n\in\mathbb{Q}$, $y_n>-5$ și $\lim\limits_{n\to\infty}y_n=-5$ **1p**

Pentru $x>-5$, avem $x*y_n>-5 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty}(x*y_n)\geq-5 \Rightarrow a-50\geq-5 \Rightarrow a\geq45$ **2p**

Dacă $a\geq45$, $(\forall)x>-5,(\forall)y>-5 \Rightarrow (x+10)(y+5)>0$ și $a-50\geq-5 \Rightarrow x*y>-5$ **2p**

SUBIECTUL II

a) Operație internă.. **1p**

Comutativitate.. **1p**

Asociativitate.. **1p**

Element neutru $"0"$ **1p**

$x'=1-x$ **1p**

b) $(\forall)x,y\in G\Rightarrow x=\frac{i}{n}$, $y=\frac{j}{n}\Rightarrow x*y=\frac{k}{n}$,

unde $k=i+j$ pentru $i+j<1$, sau $k=i+j-1$ pentru $i+j\geq1$ $\Rightarrow x*y\in G$ **1p**

$(\forall)x\in G\Rightarrow x'\in G$ **1p**

SUBIECTUL III

Funcția $G(x)=\begin{cases}x^3\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ e derivabilă și $G'(x)=g(x)=\begin{cases}-2\sin\frac{1}{x^2}+3x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ ...**4p**

Funcția $h(x)=\begin{cases}3x^2\cos\frac{1}{x^2}, & x\neq0\\ 0, & x=0\end{cases}$ este continuă deci admite primitive.......................... **2p**

$\Rightarrow 2f=h(x)-g(x)$ admite primitive $\Rightarrow$ f admite primitive.......................... **1p**

SUBIECTUL IV

a) $\int_0^1\frac{2t^3+t}{t^4+t^2+1}dt=\frac{1}{2}\ln\left|t^4+t^2+1\right|\Big|_0^1=\frac{1}{2}\ln3$ **1p**

b) $\int_0^1 f(x)dx=\frac{23}{15}$ **1p**

Cu schimbarea $g(x)=y \Rightarrow f(y)=x \Rightarrow dx=f'(y)dy$

$\int_1^3 g(x)dx=\int_0^1 yf'(y)dy=\int_0^1\left(4y^3+2y^2\right)dy=\frac{22}{15}$ și finalizare.......................... **2p**

c) Utilizând b), inegalitatea devine: $3-\int_1^3 g(x)dx+\int_1^\alpha g(x)dx\geq\alpha \Leftrightarrow \int_\alpha^3 g(x)dx\leq3-\alpha$ **1p**

cum $x\leq3$ și g crescătoare $\Rightarrow g(x)\leq g(3)=1 \Rightarrow \int_\alpha^3 g(x)dx\leq\int_\alpha^3 dx=3-\alpha$ **2p**

Subiecte și bareme elaborate sau adaptate de:
Prof. Ciudin Ioan

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a V-a

SUBIECTUL I

O mulţime de numere naturale X se numeşte *interesantă* dacă se poate împărţi în două submulţimi Y şi $X\backslash Y$ astfel încât suma elementelor din Y să fie egală cu suma elementelor din $X\backslash Y$.

Fie $A = \{1, 2, 3, ..., 2010\}$. Arătaţi că:

a) Mulţimea $B = \{2, 3, 4, 5, 6\}$ este *interesantă*.

b) Mulţimea A *nu* este *interesantă*.

c) Mulţimea $A\backslash\{1\}$ este *interesantă*

prof. Aurel Bârsan

SUBIECTUL II

Fie şirul de numere naturale:

$$a_1 = 7, \quad a_2 = 12, \quad , a_3 = 17, \quad a_4 = 22, ...$$

a) Să se scrie termenii a_5, a_{10}, a_{100} ai şirului.

b) Să se scrie termenul a_n al şirului, unde $n \in \mathbf{N}^*$.

c) Să se arate că niciunul din termenii şirului nu poate fi pătrat perfect.

d) Să se calculeze suma primilor 2010 termeni ai şirului.

prof. Dorina Bocu

SUBIECTUL III

a) Scrieţi numărul 2010 ca produsul dintre un număr par şi unul impar.

b) Arătaţi că dacă a şi b sunt numere naturale iar $a^{2010} - b^{2010} = 2009^{2010}$, atunci $a + b$ este un număr impar.

c) Exisă numere naturale a şi b astfel încât $a \cdot b = a^{2010} - b^{2010} = 2010$? Justificaţi răspunsul.

prof. Dorina Zaharia

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a V-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

a) Submulţimile sunt $\{2,3,5\}$ şi $\{4,6\}$......1p

b) Observăm, mai întâi, că suma elementelor unei mulţimi *interesante* este un număr par.....1p

Dar, suma elementelor lui A este $\frac{2010 \cdot 2011}{2} = 1005 \cdot 2011$, deci este un număr impar, prin urmare, A *nu* este *interesantă*......2p

c) Punctul a) sugerează partiţionarea mulţimii $A \backslash \{1\}$ în două mulţimi interesante astfel:

$A \backslash \{1\} = B \cup \{7, 8, ...2010\}$. În continuare fie $C = \{2,3,5\}$, $D = \{4,6\}$, $E = \{7, 2010, 8, 2009, ..., 507, 1510\}$ şi $F = \{508, 1509, 509, 1508, ..., 1008, 1009\}$. Mulţimile $C \cup E$ şi $D \cup F$ au aceeaşi sumă a elementelor şi o partiţionează pe $A \backslash \{1\}$, deci $A \backslash \{1\}$ este *interesantă*..... 3p

SUBIECTUL II

a) $a_1 = 5 \cdot 1 + 2$, $a_2 = 5 \cdot 2 + 2$, $, a_3 = 5 \cdot 3 + 2$, $a_4 = 5 \cdot 4 + 2$, deci $a_5 = 5 \cdot 5 + 2 = 27$, $a_{10} = 5 \cdot 10 + 2 = 52$, $, a_{100} = 5 \cdot 100 + 2 = 502$......2p

b) $a_n = 5 \cdot n + 2$, unde $n \in \mathbf{N}^*$......1p

c) Dacă n este număr par, atunci ultima cifră a numărului a_n este 2, dacă n este număr impar, atunci ultima cifră a numărului a_n este 7. Dar, ultima cifră a unui pătrat perfect poate fi $0, 1, 4, 5, 6, 9$, deci $a_n = 5 \cdot n + 2$ nu poate fi pătrat perfect.....2p

d) $a_1 + a_2 + ... + a_{2010} = 5(1 + 2 + ... + 2010) + 2010 \cdot 2 = 5\frac{2010 \cdot 2011}{2} + 4020 = 1005 \cdot 10059 = 10109295$....2p.

SUBIECTUL III

a) Exemplu $2010 = 10 \cdot 201$......1p

b) Ştiind că a^n are aceeaşi paritate cu a, $\forall n \in \mathbf{N}^*$, din relaţia $a^{2010} - b^{2010} = 2009^{2010}$ deducem că $a^{2010} - b^{2010}$ este impar, deci a şi b au parităţi diferite, de unde rezultă că $a + b$ este un număr impar...........3p

c) Ştiind că $a \cdot b = 2010 = 2 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 67$ rezultă a şi b au parităţi diferite, iar din relaţia $a^{2010} - b^{2010} = 2010$ deducem că $a^{2010} - b^{2010}$ este par, deci a şi b au aceeaşi paritate, ceea ce este în contradicţie cu a şi b au parităţi diferite. Deci, nu exisă numere naturale a şi b astfel încât $a \cdot b = a^{2010} - b^{2010} = 2010$.....3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VI-a

SUBIECTUL I

Se consideră mulţimea $M = \{1, 2, 3, ..., 10\}$.

a) Să se arate că mulţimea M nu se poate împărţi în două submulţimi A şi $M \backslash A$ astfel încât produsul elementelor din A să fie egal cu produsul elementelor din $M \backslash A$.

b) Să se determine un element x din mulţimea M astfel încât mulţimea $M \backslash \{x\}$ să se poată împărţi în modul descris la punctul a).

prof. Aurel Bârsan

SUBIECTUL II

Fiind date 2010 puncte distincte în plan, să se indice:

a) În ce caz se obţine cel mai mic număr de drepte determinate de câte două puncte şi care este acest număr?

b) În ce caz se obţine cel mai mare număr de drepte determinate de câte două puncte şi care este acest număr?

c) Se pot duce 2009 drepte? De ce?

prof. Dorina Bocu

SUBIECTUL III

Considerăm un triunghi ABC şi bisectoarea AD ($D \in (BC)$) a unghiului BAC. Paralelele prin B şi C la AD se intersectează cu dreptele AC, respectiv AB în E, respectiv în F, iar EF se intersecteză cu BC în M.

a) Arătaţi că $\triangle EBF \equiv \triangle BEC$.

b) Demonstraţi că $MA \perp AD$.

G.M. 3/2009

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 2 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VI-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

Notăm cu $P(X)$ produsul elementelor mulţimii X.

a) *Metoda I*

Presupunem contrariul. Cum $P(A) = P(M\backslash A)$, obţinem $P(M) = P(A) \cdot P(M\backslash A) = \big(P(A)\big)^2$, deci produsul elementelor lui M este pătrat perfect.

Dar, $P(M) = 10! = 2^8 \cdot 3^4 \cdot 5 \cdot 7$, care nu este pătrat perfect.......3p

Metoda II

Presupunem contrariul. Cel mai mare număr prim din mulţimea M este 7. Exact una dintre mulţimile A şi $M\backslash A$ îl va conţine pe 7. Atunci, produsul elementelor acesteia va fi multiplu de 7, pe când al celeilalte nu. Deci, cele două produse nu pot fi egale........3p b) Este evident că $x = 7$.....1p

Un exemplu de partiţie a mulţimii $M\backslash\{7\}$ este: $\{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ şi $\{8, 9, 10\}$......3p (orice alt exemoplu se va puncta corespunzător).

SUBIECTUL II

a) Cel mai mic număr de drepte este una, care se obţine dacă cele 2010 puncte sunt coliniare......2p

b) Cel mai mare număr de drepte se obţine dacă oricare 3 puncte sunt necoliniare şi acest număr se obţine după formula $\frac{n(n-1)}{2} = \frac{2010 \cdot 2009}{2} = 2019045$......2p

c) Dacă 2009 puncte sunt coliniare şi un punct este necoliniar cu acestea, atunci se obţin 2010 drepte, în toate celelalte cazuri se obţine un număr de drepte mai mare decat 2010, deci nu se pot obţine 2009 drepte......3p

SUBIECTUL III

$\triangle BAE$ este isoscel. Din $\widehat{DAC} \equiv \widehat{AEB}$, $\widehat{DAB} \equiv \widehat{ABE}$ şi $\widehat{DAC} \equiv \widehat{BAD}$ rezultă că $\widehat{ABE} \equiv \widehat{AEB}$ şi deci $\triangle BAE$ este isoscel. Analog, $\triangle CAF$ este isoscel.....2p

a) Observăm că $\triangle EAF \equiv \triangle CAB$ $(L.U.L)$ şi de aici $EF \equiv BC$ şi de aici $\triangle EBF \equiv \triangle CEB$ $(L.L.L)$.......2p

b) Din a) deducem $\widehat{ACB} \equiv \widehat{AEF}$. Cum $\widehat{AFC} \equiv \widehat{ACF}$, rezultă $\widehat{EFC} \equiv \widehat{BCF}$, adică $\triangle MFC$ este isoscel cu $FM \equiv CM$. Acum $\triangle MAF \equiv \triangle CAM$ $(L.L.L)$ implică MA bisectoarea $\widehat{FMC}$. Deoarece‘$\triangle MFC$ este isoscel, rezultă MA înălţime, adică $MA \perp CF$. Dar $FC \| AD$ implică $MA \perp AD$......3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VII-a

SUBIECTUL I

În trapezul $ABCD$ ($AB \| CD, AB > CD$) ducem $DM \perp AB$, $M \in (AB)$. Fie N mijlocul diagonalei BD. Demonstraţi că $MN \| AC$ dacă şi numai dacă trapezul este isoscel.

Aurel Bârsan

SUBIECTUL II

Să se determine numerele reale nenule a, b, c ştiind că $a + \frac{1}{bc} = 2b$, $b + \frac{1}{ac} = 2c$ şi $c + \frac{1}{ab} = 2a$.

prof. Mara Ilie, prof. Romeo Ilie

SUBIECTUL III

Fie ABC un triunghi echilateral, $D \in BC$ astfel încât $(DC) \equiv (BC)$ şi $E \in AC$ astfel încât $(AE) \equiv (AC)$. Dacă $DE \cap AB = \{F\}$, arătaţi că $AB = 3AF$.

G.M. 3/2009

SUBIECTUL IV

Fie numerele

$$a = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} + \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} + ... + \frac{2009}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010}$$

şi

$$b = \frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{2}{1 \cdot 2 \cdot 3} - \frac{3}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4} - ... - \frac{2009}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot ... \cdot 2010}$$

a) Determinaţi o relaţie între numerele a şi b.

b) Arătaţi că $a < 1$.

c) Arătaţi că $b < \frac{1}{2^{2009}}$.

prof. Dorina Zaharia

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a VII-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

SoluţiaI

Fie P mijlocul diagonalei AC. Se ştie că $PN \| AB$ şi $PN = \frac{AB-DC}{2}$.......3p

Deci $MN \| AC \Longleftrightarrow MNPQ$ paralelogram $\Longleftrightarrow PN \equiv AM \Longleftrightarrow AM = \frac{AB-DC}{2} \Longleftrightarrow$ $ABCD$ isoscel.......4p

SoluţiaII

Fie O intersecţia diagonalelor trapezului. Din teorema lui Thales avem $MN \| AO \Longleftrightarrow$ $\frac{BN}{BO} = \frac{BM}{BA}$.....2p

Din asemănarea triunghiurilor BOA şi DOC obţinem $\frac{DO}{BO} = \frac{DC}{AB}$, de unde $\frac{BD}{BO} = \frac{AB+DC}{AB}$, deci $\frac{BN}{BO} = \frac{AB+DC}{2AB}$ 3p

Folosind cele două relaţii deduse deja avem $MN \| AC \Longleftrightarrow \frac{BM}{BA} = \frac{AB+DC}{2AB} \Longleftrightarrow$ $BM = \frac{AB+DC}{2} \Longleftrightarrow ABCD$ isoscel.....2p.

SUBIECTUL II

Metoda I. Fie $x = a + \frac{1}{bc}$, $y = b + \frac{1}{ac}$ şi $z = c + \frac{1}{ab}$.

Avem $\frac{x}{a} = 1 + \frac{1}{abc}$, $\frac{y}{b} = 1 + \frac{1}{abc}$ ....2p şi $\frac{z}{c} = 1 + \frac{1}{abc}$ şi de aici $\frac{x}{a} = \frac{y}{b} = \frac{z}{c} = \frac{x+y+z}{a+b+c} = \frac{2(a+b+c)}{a+b+c} = 2$......2p

Aşadar, $x = 2a$, $y = 2b$, $z = 2c$. Deducem $a = b = c$ şi apoi $a = b = c = 1$......3p

Metoda II. Adunăm ecuaţiile şi obţinem $a + b + c = \frac{a+b+c}{abc}$.....2p

Cazul I: $abc = 1$. Rezultă $a = b = c = 1$.......2p

Cazul II: $a + b + c = 0$. Avem $abc + 1 = 2b^2c = 2c^2a = 2a^2b$, de unde rezultă că a, b, c au acelaşi semn, deci $a + b + c < 0$ sau $a + b + c > 0$. Fals.........3p

SUBIECTUL III

Construim $CP \| AB$ $P \in DE$.....2p În $\triangle CPE$, AF linie mijlocie implică $CP = 2 \cdot AF$......2p În $\triangle BDF$, CP linie mijlocie implică $BF = 2 \cdot CP$, deci $BF = 4 \cdot AF$ sau $AB + AF = 4 \cdot AF$, de unde $AB = 3AF$.......3p

SUBIECTUL IV

a) Se observă că $a + b = 1$........1p

b) Calculăm $a + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots + \frac{2010}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{3}{1\cdot 2\cdot 3\cdot 4} + \ldots \frac{2008}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2009} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2009} = \ldots = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{2}{1\cdot 2\cdot 3} + \frac{1}{1\cdot 2\cdot 3} = \frac{1}{1\cdot 2} + \frac{1}{1\cdot 2} = 1$. De aici rezultă că $a < 1$.......3p

c) Din $a+b=1$ şi $a=1-\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}$, obţinem $b=\frac{1}{1\cdot 2\cdot 3\cdot \ldots \cdot 2010}=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{4}\cdot \ldots \cdot\frac{1}{2010}<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}\cdot\ldots\frac{1}{2}=\frac{1}{2^{2009}}$.......3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010,
Clasa a VIII-a

SUBIECTUL I

Mulţimea A are ca elemente toate tripletele de numere reale de forma $(\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p})$, unde $m, n, p \in \mathbf{N}$, $1 \leq m < n < p \leq 100$. Fie B o submulţime a lui A care conţine numai tripletele formate din numere raţionale.

a) Câte triplete de forma $(\sqrt{m}, \sqrt{n}, 5)$ sunt în B?

b) Câte elemente are mulţimea B?

c) Câte triunghiuri dreptunghice având lungimile laturilor $(\sqrt{m}, \sqrt{n}, \sqrt{p})$ se pot forma din elementele mulţimii B?

prof.dr. Ioana Maşca

SUBIECTUL II

Trapezul $ABCD$ şi triunghiul ABE sunt situate în plane diferite. Ştiind că $AB \| CD$, $AC \cap BD = \{O\}$, iar G este centrul de greutate al triunghiului ABE, să se demonstreze că dreapta OG este paralelă cu planul (BCE) dacă şi numai dacă $AB = 2 \cdot CD$.

prof. Adriana Duţă

SUBIECTUL III

Determinaţi soluţiile naturale ale ecuaţiei:

$$6\sqrt{x-2} + 8\sqrt{y-3} + 10\sqrt{z-4} = x + y + z + 41.$$

G.M. 2/2009

SUBIECTUL IV

$ABCDA'B'C'D'$ este un paralelipiped dreptunghic în care lungimile segmentelor AB, BC, AC sunt numere pare consecutive (în această ordine), $AA' = 16$cm, $BE \perp AC$, $E \in (AC)$. Aflaţi: a) dacă paralelipipedul este un acvariu plin cu apă, este posibil să introducem în el un termometru de 18cm astfel încât acesta să fie în întregime în lichid? Justificaţi răspunsul.

b) măsura unghiului format de planele $(BC'E)$ şi $(A'AC)$.

c) distanţa de la punctul B' la planul $(BC'E)$. prof. Dorina Zaharia

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010,
Clasa a VIII-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

Observăm că $m, n, p \in \{1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100\}$

a) Triplete de forma $(\sqrt{m}, \sqrt{n}, 5)$ din B se obţin pentru $p = 25$, $n = 16$, $m \in \{1, 4, 9\}$; $n = 9$, $m \in \{1, 4\}$; $n = 4$, $m = 1$. Deci sunt 6 triplete......2p

b) Observăm că $p \geq 9$. Astfel, pentru $p = 9, m = 4, n = 1$ avem un triplet, pentru $p = 16$ avem $1 + 2$ triplete, pentru $p = 25$ sunt $1 + 2 + 3$ triplete, s.a.m.d. În total se obţin 120 triplete......4p

c) Doar 2 triplete $(3, 4, 5)$, şi $(3, 4, 5)$.........1p

SUBIECTUL II

"$\Longleftarrow$" Dacă $AB = 2 \cdot CD$, cum $\triangle DOC \sim \triangle BOA \Longrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2DC}{DC} = 2$......1p

Fie M mijlocul segmentului BE, G fiind centrul de greutate al $\triangle ABE$, rezultă $\frac{AG}{GM} = 2$.....1p

Obţinem, deci, $\frac{OA}{OC} = \frac{AG}{GM}$ şi aplicând reciproca teoremei lui Thales în $\triangle AMC$ avem $OG \| CM$, dar $MC \subset (BCE)$, deci $OG \| (BCE)$.....2p

"$\Longrightarrow$" Dacă $OG \| (BCE)$ înseamnă că orice plan care trece prin OG şi nu e paralel cu (BCE), îl intersectează pe acesta după o dreaptă paralelă cu OG. Cum $(ACM) \cap (BCE) = CM$, rezultă că $OG \| CM$. Aplicând teorema lui Thales în $\triangle ACM$, rezultă că $\frac{OA}{OC} = \frac{AG}{GM} = 2$. Dar $\triangle DOC \sim \triangle BOA \Longrightarrow \frac{OA}{OC} = \frac{AB}{DC} = \frac{2DC}{DC} = 2$, şi $AB = 2 \cdot CD$......3p

SUBIECTUL III

Ecuaţia se scrie $x - 2 + y - 3 + z - 4 - 2 \cdot 3 \cdot \sqrt{x-2} - 2 \cdot 4 \cdot \sqrt{y-3} - 2 \cdot 5 \cdot \sqrt{z-4} + 9 + 16 + 25 = 0$ 3p

sau $(\sqrt{x-2} - 3)^2 + (\sqrt{y-3} - 4)^2 + (\sqrt{z-4} - 5)^2 = 0$.....3p.

De aici deducem $x = 11$, $y = 19$, $z = 29$.....1p

SUBIECTUL IV

1) Fie $AB = 2k$, $BC = 2k + 2$, $AC = 2k + 4$, $k \in \mathbf{N}^*$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ACB$ obţinem $k = 3$, deci $AB = 6$, $BC = 8$, $AC = 10$. Aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle ACC'$ obţinem $AC' = 2\sqrt{89} > 18$, $BC = 8$, $AC = 10$, deci este posibil să introducem în el un termometru de 18cm astfel încât acesta să fie în întregime în lichid.......2p

2) Din $CC'\perp(ABC)$, $CE\perp BE$, $CE, BE\subset(ABC)$ rezultă, conform teoremei celor trei perpendiculare că $EC'\perp BE$. Din $EC'\perp BE$ şi $BE\perp AC$, $C'E, AC\subset(AA'C)$ rezultă $BE\perp(A'AC)$ şi cum $BE\subset(C'BE)$ deducem că $(C'EB)\perp(A'AC)$, deci măsura unghilui format de planele $(BC'E)$ şi $(A'AC)$ este de $90°$.......2p
3) Fie $EE'\|AA'$, $E'\in(A'C')$.
Cum $EE'\|BB'$ şi $EE'\equiv BB'$ rezultă $B'E'\|BE$. Din $B'E'\|BE$ şi $BE\subset(EBC')$ rezultă că $d\big(B',(BEC')\big)=d\big(E',(BEC')\big)$.
Fie $FE'\perp C'E$, $F\in(EC')$. Din $FE'\perp C'E$, $(C'EB)\perp(A'AC)$ şi $(C'EB)\cap(A'AC)=C'E$, rezultă că $E'F\perp(C'EB)$, deci $d\big(B',(BEC')\big)=E'F$.
Aplicând teorema catetei în $\triangle ACB$, obţinem $CE=\frac{32}{5}=C'E'$ şi aplicând teorema lui Pitagora în $\triangle C'EE'$, obţinem $C'E=\frac{16\sqrt{29}}{5}$ şi $E'F=\frac{32\sqrt{29}}{29}$......3p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a IX-a

SUBIECTUL I

a) Rezolvaţi ecuaţia $\frac{x+5}{2[x]+1} = \left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right]$, $x \neq -2$, unde $[a]$ reprezintă partea întreagă a numărului real a.

b) Fie A, B, C şi D din plan pentru care $\overrightarrow{AD} = a\overrightarrow{BA} + b\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD}$ unde $a, b \in \mathbf{R}$, iar suma lor verifică ecuaţia de la a). Arătaţi că punctele A, B, C sunt coliniare.

prof. Aurel Aldea, enunţ modificat

SUBIECTUL II

Bisectoarele unghiurilor $\widehat{A}, \widehat{B}, \widehat{C}$ ale triunghiului ABC intersectează laturile acestuia în $D \in (BC)$, $E \in (AC)$, $F \in (AB)$.

Arătaţi că triunghiul este echilateral dacă şi numai dacă $\overrightarrow{AD} + \overrightarrow{BF} + \overrightarrow{CE} = \vec{0}$.

prof. Traian Duţă

SUBIECTUL III

Se consideră numerele $x_1 = 1$, $x_2 = 1$ şi $x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}}$, $(\forall)n \geq 2$ natural. Se cere:

a) să se calculeze x_3 şi x_4;

b) să se demonstreze că $x_n < n - 1$, $(\forall)n \geq 3$;

c) să se demonstreze că $x_n \notin \mathbf{N}$, $(\forall)n \geq 3$;

prof. Romeo Ilie

SUBIECTUL IV

1. Deduceţi $S = 1^2 + 2^2 + ... + n^2$.
2. Fie $n \geq 1$ un număr natural. Să se determine $x_1, x_2, ..., x_n \in \mathbf{R}$ ştiind că $x_1^2 + x_2^2 + ... + x_n^2 - 2(x_1 + 2x_2 + ... + nx_n) + \frac{n(n+1)(n+2)}{6} \leq 0$.

GM 2/2009, enunţ completat

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a IX-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

a) Ecuaţia poate fi scrisă de forma $x+5=\left(2[x]+1\right)\cdot\left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right]$, $x\neq -2$, de unde observăm că $x\in\mathbf{Z}$. Atunci, $[x]=x$ şi $\left[\frac{x^2+2x+3}{x+2}\right]=x+\left[\frac{3}{x+2}\right]$, iar ecuaţia poate fi rescrisă sub forma $x+5=(2x+1)\cdot\left(x+\left[\frac{3}{x+2}\right]\right)$.....2p

Observăm $x=1$ soluţie. Pentru a demonstra că este unică, vom analiza cazurile:

1. $x>1$, atunci $0<\frac{3}{x+2}<1$, deci $\left[\frac{3}{x+2}\right]=0$. Ecuaţia devine $2x^2=5$ şi nu are soluţii întregi.
2. $x<-5$, atunci $-1<\frac{3}{x+2}<0$, deci $\left[\frac{3}{x+2}\right]=-1$. Ecuaţia devine $x^2-x-3=0$ şi nu are soluţii întregi.
3. $x\in\{-5,-4,-3,-1,0\}$ care nu verifică ecuaţia dată.

Prin urmare, $x=1$ soluţie unică.....3p

b) Fie O un punct arbitrar al planului. Atunci, pentru $a+b=1$, relaţia $\overrightarrow{AD}=a\overrightarrow{BA}+b\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CD}$ devine $\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OA}=a(\overrightarrow{OA}-\overrightarrow{OB})+(1-a)(\overrightarrow{OC}-\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OD}-\overrightarrow{OC}$, adică $\overrightarrow{AB}=a\overrightarrow{CA}$ ceea ce justifică faptul că punctele A,B,C sunt coliniare.....2p

SUBIECTUL II

Dacă $\triangle ABC$ este echilateral bisectoarele, sunt mediane, deci $2\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}$, $2\overrightarrow{BF}=\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}$, $2\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}\Longrightarrow 2(\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE})=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{BA}+\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CB}+\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}$........................3p

Reciproc, $\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{BF}+\overrightarrow{CE}=\overrightarrow{0}$. Notăm $BC=a$, $AC=b$, $AB=c$. Atunci $\overrightarrow{AD}=\frac{b\overrightarrow{AB}+c\overrightarrow{AC}}{b+c}$, $\overrightarrow{BF}=\frac{c\overrightarrow{BC}+a\overrightarrow{BA}}{a+c}$, $\overrightarrow{CE}=\frac{a\overrightarrow{CA}+b\overrightarrow{CB}}{b+a}$...............1p

$$(b^2-a^2)c\overrightarrow{AB}+(c^2-b^2)a\overrightarrow{BC}+(a^2-c^2)b\overrightarrow{CA}=\overrightarrow{0}.$$

Dar, $\overrightarrow{CA}=-(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BC})$ si astfel

$$(b^2c-a^2c-ba^2+bc^2)\overrightarrow{AB}+(ac^2-ab^2-ba^2+bc^2)\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{0}.........1p$$

Cum $\overrightarrow{AB}$ şi $\overrightarrow{BC}$ necoliniari $\Longrightarrow a^3 = b^3$ si deci $\triangle ABC$ este echilateral.....2p

SUBIECTUL III

a) $x_3 = \sqrt{3}$ şi $x_4 = \sqrt{3\sqrt{3}+1}$.........1p;

b) $x_3 < 2$, $x_4 < 3$..............1p

Presupunem $x_{n-1} < n-2$, $x_n < n-1$ şi demonstăm $x_{n+1} < n$.

$$x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}} = \sqrt{n^2-2} < n........2p$$

c) Demonsrtăm $x_n > n-2$, $(\forall)n \geq 3$.

$x_3 = \sqrt{3} > 1$, $x_4 = \sqrt{3\cdot 1+1} > 2$, $x_5 = \sqrt{4\cdot 2+1} > 3$.......1p

Presupunem $x_{n-1} > n-3$, $x_n > n-2$ şi demonstăm $x_{n+1} > n-1$.

$$x_{n+1} = \sqrt{nx_n + x_{n-1}} = \sqrt{n^2-n-3} > n-1........2p$$

Dar $n-2 < x_n < n-1$, deci $x_n \notin \mathbf{N}$, $(\forall)n \geq 3$.........2p

SUBIECTUL IV

1. Folosim $(1+k)^3 = 1+3k+3k^2+k^3$....1p
   Sumând apoi pentru valori ale k de la 1 la n, obţinem $(n+1)^3 = (n+1) + 3S + 3\frac{n(n+1)}{2}$, de unde găsim $S = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$.....3p

2. Cum $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1(2n+1)}{6}$, avem:

$$0 \geq \sum_{k=1}^{n} x_k^2 - 2\sum_{k=1}^{n} kx_k + \sum_{k=1}^{n} k^2 = \sum_{k=1}^{n} (x_k-k)^2 \geq 0, ...2p$$

   de unde $x_k = k$.....1p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a X-a

SUBIECTUL I

Fie $a, b, c \in \mathbf{N} \backslash \{0, 1\}$. Demonstraţi inegalităţile:

1. $\frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$;
2. $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq 3$.

prof. Gabriela Boeriu

SUBIECTUL II

Se consideră funcţia $f : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $f(x) = \begin{cases} \min\limits_{t \leq x}(t^2 - 2t + 2), & x \leq 1 \\ \max\limits_{t > x}(1 - \sqrt{t}), & x > 1 \end{cases}$

1. Să se artate că funcţia f este injectivă, dar nu este surjectivă.
2. Să se determine $k \in \mathbf{R}$ astfel încât funcţia $g : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x) + k, & x \leq 1 \\ f(x), & x > 1 \end{cases}$ să fie bijectivă.
3. Să se determine g^{-1}.

prof.dr. Viorel Drăghici

SUBIECTUL III

Arătaţi că nu există $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ astfel încât:

$$\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1} = 3i$$

Traian Duţă

SUBIECTUL IV

Să se rezolve ecuaţia $2^q = 131023 + p^2$, p şi q fiind numere prime.

prof.dr. Ioana Maşca

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a X-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

1. Aplicând inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, avem:

$$\frac{\underbrace{a+a+...+a}_{b\ ori}+\underbrace{b+b+...+b}_{c\ ori}+\underbrace{c+c+...+c}_{a\ ori}}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}.....3p$$

2. Utilizând monotonia funţiei logaritmice pentru $a, b, c \geq 2$ şi inegalitatea de la punctul 1., se obţine $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_a \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$, $\log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_b \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$, $\log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \log_c \sqrt[a+b+c]{a^b b^c c^a}$.............1p

   Însumând aceste inegalităţi, se obţine:

$$\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq \frac{1}{a+b+c} \cdot$$
$$\cdot \quad \left[(a+b+c) + (a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a) + (c\log_a b + a\log_b c + b\log_c a)\right]$$

   Aplicând din nou inegalitatea dintre media aritmetică şi media geometrică, avem:

$$\frac{a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a}{a+b+c} \geq \sqrt[a+b+c]{\log_a c \log_c b \log_b a} = 1,$$

   deci, $a\log_a c + c\log_c b + b\log_b a \geq a+b+c$.
   Analog, $c\log_a b + a\log_b c + b\log_c a \geq a+b+c$, iar de aici rezultă $\log_a \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_b \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} + \log_c \frac{ab+bc+ca}{a+b+c} \geq 3$.....3p

SUBIECTUL II

1. Se observă $f(x) = \begin{cases} x^2-2x+2, & x \leq 1 \\ 1-\sqrt{x}, & x > 1 \end{cases}$ pentru că $f_1(t) = t^2-2t+2$ este strict descrescătoare pe $(-\infty, 1]$ şi $f_2(t) = 1-\sqrt{t}$ este strict de-

screscătoare pe $(1,\infty)$. Deci, $f(\mathbf{R}) = (-\infty,0)\cup[1,\infty)$, iar f nu e surjectivă. Funţia f este strict descrescătoare pe ramuri, $f\big((-\infty,1]\big) = [1,\infty)$, $f\big((1,\infty)\big) = (-\infty,0)$, deci f injectivă.....2p

2. Se analizează cazurile:
1) $k > -1$; $g(\mathbf{R}) = (-\infty,0)\cup[k+1,\infty)$ şi $1+k > 0$, deci, g nu e surjectivă
2) $k < -1$; $g(\mathbf{R}) = (-\infty,0)\cup[k+1,\infty)$ şi $1+k < 0$, deci g nu e injectivă
3) $k = -1$; $1+k < 0$; $g(\mathbf{R}) = \mathbf{R}$ deci g surjectivă şi $g\big((-\infty,1]\big) = [0,\infty)$, $g\big((1,\infty)\big) = (-\infty,0)$, deci g injectivă. Astfel, g bijectivă.....3p

3. $g^{-1} : \mathbf{R} \longrightarrow \mathbf{R}$, $g(x) = \begin{cases} f(x)-1, & x \le 1 \\ f(x), & x > 1 \end{cases}$ $y = g(x)$;
1) $y = (x-1)^2$, $x = 1-\sqrt{y}$
2) $y = 1-\sqrt{x}$, $x = (1-y)^2$.
Deci $g^{-1}(x) = \begin{cases} 1-\sqrt{x}, & x \ge 0 \\ (1-x)^2, & x < 0 \end{cases}$ 2*p*

SUBIECTUL III
Presupunem că există $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ astfel încât:

$$3 = |3i| = \left|\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_3} + \frac{z_3}{z_1}\right| \le \left|\frac{z_1}{z_2}\right| + \left|\frac{z_2}{z_3}\right| + \left|\frac{z_3}{z_1}\right| \le 3\sqrt[3]{\frac{|z_1|}{|z_2|}\frac{|z_2|}{|z_3|}\frac{|z_3|}{|z_1|}} = 3$$

Deci, $|z_1| = |z_2| = |z_3| = r$........2p
Vom avea: $z_k = r(\cos t_k + i\sin t_k)$, $k = 1,2,3$.
Atunci:

$$\cos(t_1-t_2)+\cos(t_2-t_3)+\cos(t_3-t_1)+i[\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1)] = 3i,$$

de unde

$$\cos(t_1-t_2)+\cos(t_2-t_3)+\cos(t_3-t_1) = 0,$$
$$\sin(t_1-t_2)+\sin(t_2-t_3)+\sin(t_3-t_1) = 3.$$

Din cea de a doua relaţie avem $\sin(t_1-t_2) = \sin(t_2-t_3) = \sin(t_3-t_1) = 1$, iar de aici,

$$\begin{aligned} t_1 - t_2 &= (-1)^k\frac{\pi}{2} + k\pi, \quad k \in \mathbf{Z} \\ t_2 - t_3 &= (-1)^p\frac{\pi}{2} + p\pi, \quad p \in \mathbf{Z} \\ t_3 - t_1 &= (-1)^q\frac{\pi}{2} + q\pi, \quad q \in \mathbf{Z}\text{..........}3p \end{aligned}$$

Adunând aceste relaţii, obţinem:

$$0 = [(-1)^k + (-1)^p + (-1)^q]\frac{\pi}{2} + (p+k+q)\pi$$

sau

$$\frac{(-1)^k + (-1)^p + (-1)^q}{2} + p + q + k = 0,$$

imposibil deoarece $(-1)^k + (-1)^p + (-1)^q$ este impar şi $\frac{(-1)^k+(-1)^p+(-1)^q}{2}$ nu este număr intreg......2p

Presupunerea făcută este falsă, deci nu există $z_1, z_2, z_3 \in \mathbf{C}^*$ cu proprietatea cerută.

SUBIECTUL IV

În demonstraţie vom folosi observaţiile evidente $2^{3k} = \mathcal{M}_7 + 1$, $2^{3k+1} = \mathcal{M}_7 + 2$, $2^{3k+2} = \mathcal{M}_7 + 4$, $\forall k \in \mathbf{N}$......1p

Vom ţine cont că $131023 = 7 \cdot 18717 + 4$, iar restul împărţirii unui pătrat perfect la 7 nu poate fi decât 0, 1, 2 sau 4. ....2p

Evident că $q = 3k$ nu poate fi soluţie a problemei.....1p

Dacă $q = 3k+1$, atunci $p^2 = 2^q - 131023 = \mathcal{M}_7 + 2 - 4 = \mathcal{M}_7 + 5$, imposibil......1p

Dacă $q = 3k + 2$, atunci $p^2 = 2^q - 131023 = \mathcal{M}_7 + 4 - 4 = \mathcal{M}_7$. Deci, p este multiplu de 7. Dar p nr prim, rezultă $p = 7$. Astfel, $2^q = 131023 + 49$, deci $q = 17$.......2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XI-a

SUBIECTUL I

Fie $(x_n)_{n\geq 1}$ şi $(y_n)_{n\geq 1}$ ce satisfac:

$$4x_n = (x_{n-1} + y_{n-1})\sqrt{6} + (x_{n-1} - y_{n-1})\sqrt{2},$$
$$4y_n = (y_{n-1} - x_{n-1})\sqrt{6} + (x_{n-1} + y_{n-1})\sqrt{2},$$

pentru orice $n \geq 1$. Arătaţi că cele două şiruri sunt periodice si determinaţi perioadele acestora.

prof. Mihaly Bencze

SUBIECTUL II

Se consideră şirul $(a_n)_{n\geq 1}$, cu $a_1 = 1$ şi care verifică relaţia:

$$2n^2(a_{n+1} - a_n - 1) + n(a_{n+1} - 3a_n) + 2a_n = n^4 + 3n^3, \qquad \forall n \geq 1.$$

Să se calculeze $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1 + \frac{1}{n^3}\right)^{a_n}$.

prof. Gabriela Boeriu

SUBIECTUL III

a) Dacă există $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ astfel încât $A \cdot B = I_n$, atunci $A \cdot B = B \cdot A$.
b) Dacă există $p, q \in \mathbf{N}^*$ şi $A, B \in \mathcal{M}_n(\mathbf{C})$ astfel ca $pA + qB = A \cdot B$, demonstraţi că $A^p \cdot B^q = B^q \cdot A^p$.

prof. Traian Duţă

SUBIECTUL IV

Spunem că o matrice nenulă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ este *nilpotentă*, dacă există $n \in \mathbf{N}$ astfel încât $X^n = O_2$ (matricea nulă). Fie $A, B \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ două matrice nenule, nilpotente. Să se demonstreze că matricea $A + B$ este nilpotentă dacă şi numai dacă matricele $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente.

prof. Romeo Ilie

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XI-a
Soluţii şi bareme

SUBIECTUL I

După calcule, relaţia poate fi scrisă

$$\begin{aligned} x_n &= \cos\frac{\pi}{12}x_{n-1}+\sin\frac{\pi}{12}y_{n-1}, \\ y_n &= -\sin\frac{\pi}{12}x_{n-1}+\cos\frac{\pi}{12}y_{n-1}, \end{aligned}$$

sau,

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} x_{n-1} \\ y_{n-1} \end{pmatrix}; \qquad unde \quad A=\begin{pmatrix} \cos\frac{\pi}{12} & \sin\frac{\pi}{12} \\ -\sin\frac{\pi}{12} & \cos\frac{\pi}{12} \end{pmatrix} ....2p$$

Prin inducţie se obţine

$$\begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} = A^n\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\frac{n\pi}{12} & \sin\frac{n\pi}{12} \\ -\sin\frac{n\pi}{12} & \cos\frac{n\pi}{12} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \end{pmatrix}, ...3p$$

iar de aici

$$x_n=\cos\frac{n\pi}{12}x_0+\sin\frac{n\pi}{12}y_0; y_n=-\sin\frac{n\pi}{12}x_0+\cos\frac{n\pi}{12}y_0,$$

cu $x_{n+24}=x_n$, $y_{n+24}=y_n$, $\forall n\geq 1$, deci perioada căutată este $T=24$......2p

SUBIECTUL II

Relaţia:

$$2n^2(a_{n+1}-a_n-1)+n(a_{n+1}-3a_n)+2a_n=n^4+3n^3, \qquad \forall n\geq 1$$

poate fi scrisă $n(2n+1)a_{n+1}-(n+2)(2n-1)a_n=n^2(n+1)(n+2)$ adică

$$\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}a_{n+1}-\frac{2n-1}{n(n+1)}a_n=n.....2p$$

Iar prin sumare $\sum\limits_{k=1}^{n}\left(\frac{2n+1}{(n+1)(n+2)}a_{n+1}-\frac{2n-1}{n(n+1)}a_n\right)=\sum\limits_{k=1}^{n}k$ obţinem $a_n=\frac{n(n+1)(n^2-n+1)}{2(2n-1)}$ .....3p şi $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\infty$,......1p iar $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n^3}\right)^{a_n}=\sqrt[4]{e}$.....1p

SUBIECTUL III

a) $A \cdot B = I_n$ implică $\det(A \cdot B) = \det A \cdot \det B = 1$ iar de aici $\det B \neq 0$, B inversabilă, şi fie B^{-1} inversa sa......1p
Înmulţind la dreapta relaţia $A \cdot B = I_n$ cu B^{-1}, obţinem $A = B^{-1}$, iar înmulţind la stânga cu B avem $BA = I_n$, deci $A \cdot B = B \cdot A$......2p
b) Dacă $pA + qB = A \cdot B$, $A \cdot B - pA - qB = O_n$ iar adunând pqI_n avem $(A - qI_n)(B - pI_n) = pqI_n$. Împărţind prin pq obţinem $(\frac{1}{q}A - I_n)(\frac{1}{p}B - I_n) = I_n$.......1p
Conform punctului anterior, $(\frac{1}{q}A - I_n)(\frac{1}{p}B - I_n) = (\frac{1}{p}B - I_n)(\frac{1}{q}A - I_n)$, iar de aici rezultă $A \cdot B = B \cdot A$......2p
Acum avem

$$A^pB^q = A^p\underbrace{B \cdot B \cdot ... \cdot B}_{q\ ori} = BA^p\underbrace{B \cdot B \cdot ... \cdot B}_{q-1\ ori} = ... = B^qA^p......1p$$

SUBIECTUL IV
Folosim faptul că dacă $X \in \mathcal{M}_2(\mathbf{C})$ şi $X^n = O_2$ atunci $X^2 = O_2$ ($X^n = O_2 \Longrightarrow \det X = 0 \Longrightarrow X^2 = (trX) \cdot X \Longrightarrow X^n = (trX)^{n-1} \cdot X \Longrightarrow X = O_2 \quad sau \quad trX = 0 \Longrightarrow X^2 = O_2$).....1p
Presupunem că $A + B$ nilpotentă. $(A + B)^2 = O_2 \Longrightarrow A^2 + AB + BA + B^2 = O_2 \Longrightarrow AB + BA = O_2 \Longrightarrow trAB = -trBA = -trAB \Longrightarrow trAB = trBA = 0 \det AB = \det BA = 0$. Astfel,$(AB)^2 - (trAB)AB + (\det AB)I_2 = O_2$, deci $(AB)^2 = O_2$.....2p
Analog $(BA)^2 = O_2$, deci $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente......2p
Să presupunem acum că $A \cdot B$ şi $B \cdot A$ sunt nilpotente. Atunci $(A + B)^2 = A^2 + AB + BA + B^2 = AB + BA$.
$(A + B)^4 = (AB)^2 + AB^2A + BA^2B + (BA)^2 = O_2 + O_2 + O_2 + O_2 = O_2$, deci $A + B$ sunt nilpotente......2p

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I

Fie $G_1 = (-a+b, a+b)$, $G_2 = (-1,1)$, unde $a,b \in \mathbf{R}, (a \neq 0)$ şi operaţiile $\perp$, $\top$ definite astfel:

$$x \perp y = \frac{bxy + (a^2-b^2)(x+y-b)}{xy - b(x+y) + a^2 - b^2}, \qquad (\forall) x, y \in G_1$$

şi

$$x \top y = \left(\frac{\sqrt[2n+1]{x} + \sqrt[2n+1]{y}}{1 + \sqrt[2n+1]{xy}} \right)^{2n+1}, \qquad (\forall) x, y \in G_2, n \in \mathbf{N}^*.$$

Arătaţi că $\left(G_1, \perp\right)$ şi $\left(G_2, \top\right)$ sunt grupuri abeliene şi stabiliţi un izomorfism între ele.

prof. Mihaly Bencze

SUBIECTUL II

Fie $(G, \cdot)$ un grup şi H o submulţime a lui G. Spunem că H este *generator de ordinul 2 pentru* G, dacă pentru orice element $x \in G$ există două elemente $a, b \in H$, astfel încât $x = a \cdot b$.

a) Să se arate că orice submulţime H a lui G cu cel puţin $\left[\frac{n}{2}\right] + 1$ elemente este generator de ordinul 2 pentru G.

b) Să se dea exemplu de grup finit cu cel puţin 4 elemente care nu are generator de ordinul 2 o mulţime finită cu $\left[\frac{n}{2}\right]$ elemente.

prof.dr. Cătălin Ciupală

SUBIECTUL III

Arătaţi că

$$\int_0^1 \frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2} dx \leq \frac{\pi}{3\sqrt{3}} \ln \frac{3\sqrt{3}}{e}.$$

prof.dr. Ioana Maşca

SUBIECTUL IV

Să se calculeze $L = \lim\limits_{n\to\infty} \left(\int_0^n \frac{[x]}{[x]^2+3[x]+2} dx - \ln(n+1) \right)$, unde $n \in \mathbf{N}^*$, iar $[x]$ reprezintă partea întreagă a numărului real x.

GM 12/2009

Notă: Toate subiectele sunt obligatorii. Fiecare subiect are 7p. Timp de lucru 3 ore.

OLIMPIADA DE MATEMATICĂ
Etapa locală, Braşov, februarie 2010
Clasa a XII-a

SUBIECTUL I
$G=(-1,1)$ împreună cu operaţia $x\star y=\frac{x+y}{xy+1}$, $(\forall)x,y\in G$ formează o structură de grup abelian......1p
Fie $f:G\longrightarrow G_1$, $f(x)=ax+b$ o funcţie bijectivă şi $f(x\star y)=f(x)\perp f(y)$ şi fie $g:G\longrightarrow G_2$, $g(x)=x^{2n+1}$ o funcţie bijectivă şi $g(x\star y)=g(x)\top g(y)$.......5p
Rezultă $(G_1,\perp)$ şi $(G_2,\top)$ sunt grupuri abeliene izomorfe.......1p
SUBIECTUL II
a) Fie H o submulţime a lui G cu cel puţin $\left[\frac{n}{2}\right]+1$ elemente. Fie $a\in G$ un element oarecare. Considerăm funcţia $f:H\longrightarrow G$, $f(x)=ax^{-1}$.......1p
Se observă imediat că funcţia f este injectivă, deci $card(Imf)=card(H)\geq\left[\frac{n}{2}\right]+1$, deci $Imf\cap H$ are cel puţin un element $y\Longrightarrow$ există $x\in H$ astfel încât $f(x)=y\Longrightarrow ax^{-1}=y\Longrightarrow a=yx$, ceea ce trebuia demonstrat......3p
b) Fie $K=\{e,a,b,c\}$ grupul lui Klein. Mulţimea $H=\{e,a\}$ este subgrup al lui K, deci nu este generator pentru K......3p
SUBIECTUL III

În demonstraţie vom folosi *inegalitatea Cebîsev* pentru funcţii de monotonii diferite, adică $\int_a^b f\cdot\int_a^b g\geq(b-a)\int_a^b f\cdot g$......2p
Astfel, $\int_0^1\frac{\ln(1+2x)}{1+3x^2}dx\leq\int_0^1\ln(1+2x)dx\cdot\int_0^1\frac{1}{1+3x^2}dx$.....1p
Dar $\int_0^1\ln(1+2x)dx=\frac{3}{2}\ln 3-1$, iar $\int_0^1\frac{1}{1+3x^2}dx=\frac{\pi}{3\sqrt{3}}$.....3p. După calcule se ajunge la rezultatul căutat......1p
SUBIECTUL IV

$\int_0^n\frac{[x]}{[x]^2+3[x]+2}dx=\int_0^1\frac{0}{2}dx+\int_1^2\frac{1}{1+2+3}dx+\int_2^3\frac{2}{4+6+2}dx+...+\int_{n-1}^n\frac{n-1}{n(n+1)}dx=$
$\frac{0}{1\cdot2}+\frac{1}{2\cdot3}+...\frac{n-1}{n(n+1)}=\sum_{k=1}^{n-1}\frac{k}{(k+1)(k+2)}=\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}+\frac{2}{n+1}-\frac{1}{2}$.....5p
Astfel, $L=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+...+\frac{1}{n}-\ln n\right)+\lim_{n\to\infty}\left(\frac{2}{n+1}-2+\ln n-\ln(n+1)\right)=c_n-2$......2p