ΝΙΟΣΤΕΣ ΡΙΖΕΣ. ΤΑ ΣΥΜΒΟΛΑ $\sqrt[\nu]{\alpha}$, α^x. ΣΧΕΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

του Αντώνη Κυριακόπουλου

1. ΡΙΖΕΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}_0^+ = [0,+\infty)$

Θεώρημα και ορισμός. Δοθέντος, ενός πραγματικού αριθμού $\alpha \geq 0$ και ενός φυσικού αριθμού ν>0, υπάρχει ένας μοναδικός πραγματικός αριθμός $\beta \geq 0$ με $\beta^\nu=\alpha$. Ο αριθμός αυτός β ονομάζεται νιοστή ρίζα του α στο σύνολο $\mathbb{R}_0^+$ και συμβολίζεται με $\sqrt[\nu]{\alpha}$.

Έτσι, με α, $\beta \in \mathbb{R}_0^+$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$\beta^\nu = \alpha \Leftrightarrow \beta = \sqrt[\nu]{\alpha}.$$

• Θεωρούμε ένα πραγματικό αριθμό $a \geq 0$. Έχουμε: $\sqrt[1]{a} = a$. Θέτουμε: $\sqrt{\alpha} = \sqrt[2]{\alpha}$.

Παραδείγματα:

α) $\sqrt[\nu]{0} = 0$ (το 0 δεν έχει άλλη νιοστή ρίζα στο $\mathbb{R}_0^+$).

β) $\sqrt{4} = 2$ (το 4 δεν έχει άλλη τετραγωνική ρίζα στο $\mathbb{R}_0^+$).

γ) $\sqrt[3]{8} = 2$ (το 8 δεν έχει άλλη κυβική ρίζα στο $\mathbb{R}_0^+$).

Στη συνέχεια αποδεικνύονται όλες οι γνωστές ιδιότητες των ριζών (ριζικών).

Σημείωση 1. Για να εισάγουμε ένα σύμβουλο στα μαθηματικά, θα πρέπει προηγουμένως να έχουμε αποδείξει ότι το μαθηματικό αντικείμενο ,που θα συμβολίσουμε με το νέο σύμβολο, υπάρχει και είναι μοναδικό (διαφορετικά κάθε φορά που θα το συναντάμε δεν θα ξέρουμε τι παριστάνει).

2. ΡΙΖΕΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{R}$

Ορισμός. Δοθέντος, ενός αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}$ και ενός φυσικού αριθμού ν>0, κάθε αριθμός $x \in \mathbb{R}$ με $x^\nu=\alpha$ ονομάζεται μία (πραγματική) νιοστή ρίζα του α (στον ορισμό αυτό δεν εννοούμε κανένα σύμβολο).

Έτσι με α, $x \in \mathbb{R}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$(\text{x νιοστή ρίζα του α}) \Leftrightarrow x^\nu = \alpha.$$

Αποδεικνύεται εύκολα ότι:

i) Το 0 έχει μια μόνο νιοστή ρίζα, το 0 (= $\sqrt[\nu]{0}$).

ii) Έστω ότι α>0. Τότε:

- Αν ο ν είναι άρτιος, ο α έχει δυο νιοστές ρίζες, τις: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$ και $x = -\sqrt[\nu]{\alpha}$.
- Αν ο ν είναι περιττός, ο α έχει μία μόνο νιοστή ρίζα, την: $x = \sqrt[\nu]{\alpha}$.

iii) Έστω ότι α<0. Τότε

- Αν ο ν είναι άρτιος, ο α δεν έχει νιοστές ρίζες.
- Αν ο ν είναι περιττός, ο α έχει μία μόνο νιοστή ρίζα, την : $x = -\sqrt[\nu]{-\alpha} = -\sqrt[\nu]{|\alpha|}$.

Αυτά προκύπτουν από την επίλυση της εξίσωσης: $x^\nu = a$, όπου $\alpha, x \in \mathbb{R}$ και ν φυσικός θετικός. Συνοπτικά:

Η ΕΞΙΣΩΣΗ: $x^{\nu} = \alpha$

$\alpha>0$	$\begin{cases} \nu \text{ περιτός: } x^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow x=\sqrt[\nu]{\alpha} \\ \nu \text{ άρτιος : } x^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow x=\pm\sqrt[\nu]{\alpha} \end{cases}$
$\alpha<0$	$\begin{cases} \nu \text{ περιτός: } x^{\nu}=\alpha \Leftrightarrow x=-\sqrt[\nu]{\lvert\alpha\rvert} \\ \nu \text{ άρτιος : } x^{\nu}=\alpha, \text{ αδύνατη} \end{cases}$
$\alpha=0$: $x^{\nu}=0 \Leftrightarrow x=0$	

Παραδείγματα:

α) Το 4 έχει δυο τετραγωνικές ρίζες τις 2 και –2, γιατί: $x^2=4 \Leftrightarrow (x=2 \text{ ή } x=-2)$. Έχουμε: $2=\sqrt{4}$ και $-2=-\sqrt{4}$ (και όχι $\sqrt{4}=\pm 2$).

β) Το 27 έχει μια μόνο κυβική ρίζα το 3, γιατί: $x^3=27 \Leftrightarrow x=3$. Έχουμε $3=\sqrt[3]{27}$.

γ) Το –4 δεν έχει τετραγωνικές ρίζες, γιατί η εξίσωση: $x^2=-4$ είναι αδύνατη.

δ) Το –8 έχει μια μόνο κυβική ρίζα το –2, γιατί: $x^3 = 8 \Leftrightarrow x = -2$. Έχουμε:

$$-2=-\sqrt[3]{|-8|}=-\sqrt[3]{8}.$$

3. ΡΙΖΕΣ ΣΤΟ ΣΥΝΟΛΟ $\mathbb{C}$

Ορισμός. **Δοθέντος ενός αριθμού $\alpha \in \mathbb{C}$ και ενός φυσικού αριθμού ν>0, κάθε αριθμός $z \in \mathbb{C}$ με $z^{\nu}=\alpha$ ονομάζεται μια νιοστή ρίζα του α (στο σύνολο $\mathbb{C}$)** (στον ορισμό αυτό δεν εννοούμε κανένα σύμβολο).

Έτσι, με $\alpha, z \in \mathbb{C}$ και $\nu \in \mathbb{N}^*$, έχουμε:

$$(z \text{ νιοστή ρίζα του } \alpha) \Leftrightarrow z^{\nu}=\alpha.$$

Αποδεικνύετε το εξής θεώρημα:

Θεώρημα. **Κάθε μιγαδικός αριθμός, διάφορος του 0, έχει (στο σύνολο $\mathbb{C}$) ν ακριβώς νιοστές ρίζες διαφορετικές μεταξύ τους(ν φυσικός θετικός αριθμός).**

Στο σύνολο $\mathbb{C}$ δεν ορίζουμε σύμβολο για καμιά νιοστή ρίζα. Για παράδειγμα, η έκφραση: $\sqrt{3+2i}$ **δεν έχει νόημα.**

Παράδειγμα:

Να βρείτε τις τετραγωνικές ρίζες του αριθμού: $z^2=3-4i$.

Λύση. Ένας μιγαδικός αριθμός z=x+yi , $x, y \in \mathbb{R}$ είναι ζητούμενος αν , και μόνον αν:

$$z^2=3-4i \Leftrightarrow (x+yi)^2=3-4i \Leftrightarrow \begin{cases} (x+yi)^2=3-4i \\ \left|(x+yi)^2\right|=|3-4i| \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2+2xyi=3-4i \\ |x+yi|^2=\sqrt{3^2+(-4)^2} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x^2-y^2=3 \\ 2xy=-4 \\ x^2+y^2=5 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2=4 \\ y^2=1 \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=2 \text{ ή } x=-2) \\ (y=1 \text{ ή } y=-1) \\ xy=-2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} (x=2,\ y=-1) \text{ και} \\ (x=-2,\ y=1) \end{cases}$$

Άρα, οι ζητούμενες τετραγωνικές ρίζες είναι οι αριθμοί: $z=2-i$ και $z=-2+i$.

Σημείωση 2. Δεν πρέπει να συγχέουμε την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού α με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ **.** Νιοστές ρίζες ενός αριθμού $\alpha \in \mathbb{R}$ ονομάζουμε τις λύσεις της εξίσωση $x^{\nu} = \alpha$ (όσες έχει). Το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$ ορίζεται μόνο όταν $\alpha \geq 0$ και παριστάνει μία μόνο νιοστή ρίζα του α. Μπορεί όμως το α να έχει και άλλες νιοστές ρίζες.

Ερώτηση. Ποιες είναι οι τετραγωνικές ρίζες του 9;

Απάντηση. Οι αριθμοί 3 και -3(δηλαδή, οι λύσεις της εξίσωσης: $x^2 = 9$).

Ερώτηση. Τι παριστάνει το σύμβολο $\sqrt{9}$;

Απάντηση. Τον αριθμό 3(δηλαδή, τον αριθμό β>0 με $\beta^2 = 9$): $\sqrt{9} = 3$ (και όχι $\sqrt{9} = \pm 3$).

4. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΡΗΤΟ ΑΡΙΘΜΟ

Ορισμός. Για κάθε αριθμό $\alpha \in \mathbb{R}$ με α>0 και για κάθε $\mu, \nu \in \mathbb{Z}$ με ν>0, ορίζουμε:

$$\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}.$$

Επίσης, με μ, ν θετικούς ακέραιους, ορίζουμε: $0^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{0^{\mu}}\ (=0)$.

- Έτσι, με $\alpha \geq 0$ και μ, ν θετικούς ακέραιος, έχουμε: $\alpha^{\frac{\mu}{\nu}} = \sqrt[\nu]{\alpha^{\mu}}$.

Παραδείγματα:

α) $16^{\frac{3}{4}} = \sqrt[4]{16^3} = \sqrt[4]{2^{12}} = 2^3 = 8.$

β) $4^{-\frac{1}{2}} = \sqrt[2]{4^{-1}} = \sqrt{\dfrac{1}{4}} = \dfrac{1}{2}.$

γ) $4^{\frac{2}{3}} = \sqrt[3]{4^2} = \sqrt[3]{2^4} = 2\sqrt[3]{2}.$

- **Αποδεικνύεται ότι όλες οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτη ακέραιο αριθμό ,ισχύουν και για δυνάμεις με εκθέτει ρητό αριθμό.**

Προσοχή. Δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό, όχι ακέραιο, και με βάση αρνητικό ή μιγαδικό αριθμό, **δεν ορίζουμε.** Για παράδειγμα, οι εκφράσεις:

$$(-27)^{-\frac{2}{3}},\ (-8)^{\frac{1}{2}},\ (3-2i)^{\frac{3}{2}},\ (\sigma\upsilon\nu\alpha + i\eta\mu\alpha)^{\frac{2}{3}}$$ **δεν έχουν νόημα.**

Σημείωση 3. Μερικοί συγγραφείς (παλαιότερα σχεδόν όλοι, σήμερα ελάχιστοι) την νιοστή ρίζα ενός αριθμού α<0, όταν το ν είναι φυσικός περιττός(δηλαδή τη λύση της εξίσωσης: $x^{\nu} = \alpha$) την συμβολίζουν με $\sqrt[\nu]{\alpha}$. Για παράδειγμα, την κυβική ρίζα του -8 την συμβολίζουν με $\sqrt[3]{-8}$. Ένας τέτοιος συμβολισμός, μόνο προβλήματα δημιουργεί**: Δεν ισχύουν τα γνωστά θεωρήματα των ριζικών, δεν μετατρέπεται σε δύναμη με εκθέτη ρητό αριθμό κτλ.**[είναι λάθος να γράφουμε: $\sqrt[3]{-8} = (-8)^{\frac{1}{3}}$, γιατί το δεύτερο μέλος δεν έχει νόημα §4].

Βεβαίως, δεν είναι μαθηματικό λάθος να εισάγει κάποιος το σύμβολο αυτό. Πάντως, είναι ένα σύμβολο που μας δημιουργεί πολλά προβλήματα ,γίνεται αιτία πολλών παρερμηνειών και το σπουδαιότερο **δεν μας χρειάζεται.**

5. ΔΥΝΑΜΕΙΣ ΜΕ ΕΚΘΕΤΗ ΤΥΧΟΝΤΑ ΠΡΑΓΜΑΤΙΚΟ ΑΡΙΘΜΟ

Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και x με α>0. Αποδεικνύεται ότι υπάρχουν ακολουθίες ρητών αριθμών (r_{ν}) με $\lim\limits_{\nu \to +\infty} r_{\nu} = x$.

Σημειώνουμε ότι αν (r_{ν}) είναι μια ακολουθία ρητών αριθμών, οι όροι της ακολουθίας $\left(\alpha^{r_{\nu}}\right)$ είναι δυνάμεις με εκθέτη ρητό αριθμό (§ 4).

Θεώρημα και ορισμός. Θεωρούμε δύο πραγματικούς αριθμούς α και x με α>0. Για κάθε ακολουθία ρητών αριθμών (r_{ν}) με $\lim\limits_{\nu \to +\infty} r_{\nu} = x$, η ακολουθία $\left(\alpha^{r_{\nu}}\right)$ συγκλίνει σε ένα πραγματικό αριθμό, ο οποίος είναι ανεξάρτητος από την εκλογή της ακο-

λουθίας ρητών αριθμών (r_ν) με $\lim_{\nu\to+\infty} r_\nu = x$. Το όριο αυτό (πραγματικός αριθ - μός) ονομάζεται δύναμη με βάση το α και εκθέτη το x και συμβολίζεται με α^x. Έτσι έχουμε:

$$\alpha^x = \lim_{\nu\to+\infty} \alpha^{r_\nu}.$$

Επίσης, για κάθε πραγματικό αριθμό x>0, ορίζουμε: $0^x = 0$.

Στον παραπάνω ορισμό, αν ο αριθμός x είναι ρητός, η έννοια του συμβόλου α^x μας είναι γνωστή. Στην περίπτωση αυτή (που ο αριθμός x είναι ρητός) , μπορούμε να αποδείξουμε εύκολα, ότι η παλαιά και η νέα έννοια συμβόλου α^x (με τις ακολουθίες), ταυτίζονται.

- **Αποδεικνύεται ότι οι ιδιότητες των δυνάμεων με εκθέτες ρητούς αριθμούς, ισχύουν γενικά και για τις δυνάμεις με εκθέτες πραγματικούς αριθμούς.**

6. ΣΥΝΟΛΟ ΟΡΙΣΜΟΥ ΤΗΣ ΣΥΝΑΡΤΗΣΗΣ $F(x)=[f(x)]^{g(x)}$

Για να βρούμε σύνολο ορισμού της συνάρτησης αυτής F, όπου f και g είναι δύο δοσμένες συναντήσεις, βρίσκουμε πρώτα σύνολο ορισμού, έστω Α, της f και το σύνολο ορισμού, έστω Β, της g. Σύμφωνα με τα προηγούμενα, ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει το σύνολο ορισμό της συνάρτηση F αν, και μόνο αν, πληροί μία (τουλάχιστον) από τις παρακάτω τρεις συνθήκες:

$$i)\ \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)>0 \end{cases} \qquad \mathrm{ii)} \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \qquad \mathrm{iii)} \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)<0 \\ g(x)\in\mathbb{Z} \end{cases}$$

Παράδειγμα 1. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης: $F(x)=x^x$.

Λύση. Εδώ, έχουμε: $f(x)=x$ και g(x)=x**.** Και οι δύο αυτές συναρτήσεις έχουν σύνολο ορισμού το $\mathbb{R}$, οπότε $\mathrm{A}=\mathbb{R}$ και Β=$\mathbb{R}$ και άρα: $\mathrm{A}\cap\mathrm{B}=\mathbb{R}$. Ένας αριθμός $x\in\mathbb{R}$ ανήκει το σύνολο ορισμό της συνάρτηση F αν, και μόνο αν:

$$i)\ \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x>0 \end{cases} \Leftrightarrow x\in(0,+\infty)\ \text{ ή}$$

$$\mathrm{ii)} \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)=0 \\ g(x)>0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x=0 \\ x>0 \end{cases},\ \text{αδύνατον} \quad \text{ή}$$

$$\mathrm{iii)} \begin{cases} x\in(\mathrm{A}\cap\mathrm{B}) \\ f(x)<0 \\ g(x)\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x\in\mathbb{R} \\ x<0 \\ x\in\mathbb{Z} \end{cases} \Leftrightarrow x\in\{-1,-2,-3,...\}.$$

Συνεπώς, το σύνολο ορισμού τη συνάρτησης $F(x)=x^x$ είναι το σύνολο:

$$\{-1,-2,-3,...\}\cup(0,+\infty).$$

Παράδειγμα 2. Να βρείτε το σύνολο ορισμού της συνάρτησης:

$$F(x)=\left(x^2-3x+2\right)^{\frac{1}{x-1}}.$$

Λύση. Όπως προηγουμένως βρίσκουμε ότι το σύνολο ορισμό της συνάρτησης F είναι το σύνολο:

$$(-\infty,1)\cup[2,+\infty)\cup\left\{\frac{\kappa+1}{\kappa} \mid \kappa\in\mathbb{Z},\kappa\geq 2\right\}.$$

7. ΣΧΟΛΙΟ

Το βιβλίο των μαθηματικών της Β΄ Γυμνασίου δίνει τον ορισμό της τετραγωνικής ρίζας μόνο στο σύνολο $\mathbb{R}_0^+$ και μάλιστα χωρίς να αναφέρει τίποτα (έστω και πληροφοριακά) για την ύπαρξη (σελίδα 41). Το ίδιο κάνει και το βιβλίο της Γ΄ Γυμνασίου (σελίδα 20). Το ίδιο κάνει και το βιβλίο της Α΄ Λυκείου για τη νιοστή ρίζα (σελίδα 44). Μάλιστα, το βιβλίο αυτό στη σελίδα 45 παρατηρεί ότι ο αριθμός $\sqrt[\nu]{\alpha}$ $(\alpha \geq 0)$ είναι η μη αρνητική λύση της εξίσωσης $x^\nu=\alpha$. Έτσι αν η εξίσωση αυτή έχει και μια αρνητική λύση, τότε αυτή δεν είναι μια νιοστή ρίζα του α !!! Με άλλα λόγια, σύμφωνα με τα σχολικά βιβλία, π.χ. το -2 δεν είναι μια τετραγωνική ρίζα του 4, αν και $(-2)^2=4$. **Είναι φανερό ότι έχουν μπερδέψει την έννοια της νιοστής ρίζας ενός αριθμού $\alpha \in \mathbf{R}$ με το σύμβολο $\sqrt[\nu]{\alpha}$.**

Αξίζει να σημειωθεί ότι το βιβλίο των μαθηματικών της Γ΄Λυκείου (θετικής και Τεχνολογικής Κατεύθυνσης, έκδοση 2007) στη σελίδα 115 αναφέρει ότι οι λύσεις της εξίσωσης $z^\nu=1$, όπου $z \in \mathbb{C}$, λέγονται νιοστές ρίζες της μονάδας. Λοιπόν: **Άλλα λένε στα παιδιά στην Α΄ Λυκείου και άλλα στη Γ΄ Λυκείου;**