



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
Εκδόσεις

**Για παραγγελίες των βιβλίων 2310610920**

## Θέματα Προσομοίωσης Πανελλαδικών Β.Α.Τ.

### ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ Γ' ΤΑΞΗΣ

ΕΝΙΑΙΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΤΕΤΑΡΤΗ 30 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2008

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

#### ΘΕΜΑ 1°

Α. Έστω  $f$  μια συνάρτηση ορισμένη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι εάν  $F$  είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , τότε

- όλες οι συναρτήσεις της μορφής  $G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ ,

είναι παράγουσες της  $f$  στο  $\Delta$  και

- κάθε άλλη παράγουσα  $G$  της  $f$  στο  $\Delta$  παίρνει τη μορφή

$G(x) = F(x) + c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ .

Β. Να διατυπωθεί ο ορισμός του σημείου καμπής.

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη *Σωστό ή Λάθος*

1. Η εικόνα  $f(\Delta)$  ενός διαστήματος  $\Delta$  μέσω μιας συνεχούς και μη σταθερής συνάρτησης  $f$  είναι διάστημα.

2. Εάν  $f$  είναι συνάρτηση συνεχής στο  $(\alpha, \beta)$ , τότε η  $f$  παίρνει στο  $(\alpha, \beta)$  μια μέγιστη τιμή  $M$  και μια ελάχιστη τιμή  $m$ .

3. Τα εσωτερικά σημεία του διαστήματος  $\Delta$ , στα οποία η  $f$  δεν παραγωγίζεται ή η παράγωγος της είναι ίση με το μηδέν, λέγονται ακρότατα της  $f$  στο  $\Delta$ .

**4.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $(\alpha, \beta)$  με εξαίρεση ίσως ένα σημείο του  $x_0$ . Εάν η  $f$  είναι κυρτή στο  $(\alpha, x_0)$  και κοίλη στο  $(x_0, \beta)$  ή αντιστρόφως, τότε το σημείο  $A(x_0, f(x_0))$  είναι υποχρεωτικά σημείο καμπής της γραφικής παράστασης της  $f$ .

**5.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $[\alpha, \beta]$ . Εάν υπάρχει  $x_0 \in (\alpha, \beta)$  ώστε  $f'(x_0) = 0$ , τότε  $f(\alpha) = f(\beta)$ .

### ΘΕΜΑ 2°

**A.** Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$z_1 = (3\lambda - 5) + (\mu - 2)i \text{ και } z_2 = (2\mu - 1) + (\lambda - 1)i.$$

Εάν  $A(w_1)$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $w_1 = z_1 + z_2$  η οποία κινείται πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon_1): y = x + 2$ , ενώ  $B(w_2)$  είναι η εικόνα του μιγαδικού  $w_2 = z_1 - z_2$  η οποία κινείται πάνω στην ευθεία  $(\varepsilon_2): y = x$ .

Να βρεθούν οι πραγματικοί αριθμοί  $\mu, \lambda$ .

**B.** Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο διάστημα  $[-1, 1]$  με  $f(-1) = -1$  και  $f(1) = 1$ , για την οποία ισχύει

$$f'(x) \leq 1, \text{ για κάθε } x \in (-1, 1).$$

Να αποδείξετε ότι η γραφική παράσταση της  $f$  διέρχεται από την αρχή των αξόνων  $O(0,0)$ .

### ΘΕΜΑ 3°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί  $z_1, z_2$  για τους οποίους ισχύει

$$|z_1 + z_2|^2 - 2(1 + \operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)) = 2(|z_1| + 3|z_2| - \frac{15}{2}).$$

(i) Να υπολογίσετε τα μέτρα των μιγαδικών  $z_1, z_2$ .

(ii) Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  η οποία είναι συνεχής στο  $\mathbb{R}$  και τον μιγαδικό αριθμό

$$w = \int_0^1 f(|z_1|) dz_1 - 2008[f(|z_2|) + f(|z_1| + |z_2|)]i,$$

για τον οποίο ισχύει  $\operatorname{Re}(w) = \frac{1}{2008} \operatorname{Im}(w)$ .

(α) Να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $f(x) = 0$ , έχει τουλάχιστον μια πραγματική ρίζα στο διάστημα  $(2,5)$ .

(β) Εάν ισχύει  $\int_0^a f(t) dt = \eta\mu\alpha$ , να αποδείξετε ότι υπάρχει

ένας τουλάχιστον αριθμός  $\xi \in (0,a)$ :  $f(\xi) = \sin \xi$ .

(iii) Βρείτε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται μεταξύ της  $g(x) = x^3 - 2x$  και της εφαπτομένης της  $g$  στο σημείο  $A(-1, g(-1))$ .

#### ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>

A. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f$  η οποία είναι παραγωγίσιμη και κοίλη στο  $\mathbb{R}$  καθώς και τη συνάρτηση ολοκλήρωμα

$$G(x) = \int_x^{x+1} f(t) dt, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να μελετηθεί η  $G$  ως προς τη κυρτότητα στο  $\mathbb{R}$ .

(ii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x \in \mathbb{R}$

$$f(x+2) - f(x+1) < \int_{x+1}^{x+2} f(t) dt - \int_x^{x+1} f(t) dt < f(x+1) - f(x).$$

**Β.** Εάν  $f, g$  είναι συνεχείς συναρτήσεις στο διάστημα  $[α,β]$  και

$$h(x) = \left( \int_{\alpha}^x f(t) \cdot g(t) dt \right)^2 - \int_{\alpha}^x f^2(t) dt \cdot \int_{\alpha}^x g^2(t) dt, \quad \alpha \leq x \leq \beta.$$

Να αποδείξετε ότι η  $h$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $(\alpha, \beta)$ .

**Γ.** Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} \int_x^{x+1} \frac{1}{1+t^2} dt$ .

## ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ Α. ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2009

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ ΚΑΙ Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΕΠΑ.Λ

ΠΑΡΑΣΚΕΥΗ 3 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2009

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

### ΘΕΜΑ 1°

**Α.** Έστω δύο συναρτήσεις  $f, g$  ορισμένες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ .

Να αποδείξετε ότι εάν

- οι  $f, g$  είναι συνεχείς στο  $\Delta$  και
- $f'(x) = g'(x)$ , για κάθε εσωτερικό σημείο  $x$  του  $\Delta$ ,

τότε υπάρχει σταθερά  $c \in \mathbb{R}$  τέτοια ώστε για κάθε  $x \in \Delta$  ισχύει

$$f(x) = g(x) + c.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 12**

**Β.** Να διατυπωθούν οι ορισμοί κυρτής και κοίλης συνάρτησης.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος**

**1.** Εάν η  $f$  συνεχής στο  $[α,β]$  και  $\int_{\alpha}^{\beta} f(x)dx \geq 0$ , τότε  $f(x) \geq 0$ , για κάθε  $x \in [α,β]$ .

**ΜΟΝΑΔΑ 1**

**2.** Εάν οι συναρτήσεις  $f, g$  έχουν όριο στο  $x_0$  και ισχύει  $f(x) \leq g(x)$ , κοντά στο  $x_0$ , τότε  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ .

**ΜΟΝΑΔΑ 1**

**3.** Ισχύει  $2\sqrt{x} \leq 3 - \frac{1}{x}$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

**ΜΟΝΑΔΑ 1**

**4.** Εάν η  $f(x) = e^x \cdot (x^2 - 5x + \alpha)$ ,  $x \in \mathbb{R}$ , έχει σημείο καμπής στο 1, τότε  $\alpha = 8$ .

**ΜΟΝΑΔΑ 1**

**5.** Εάν  $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = -\infty$ , τότε  $f(x) < 0$ , κοντά στο  $x_0$ .

**ΜΟΝΑΔΑ 1**

**ΘΕΜΑ 2°**

Θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση μιγαδικής μεταβλητής

$$f(z) = z^2 - \lambda z + 9, \text{ όπου } \lambda \text{ πραγματική παράμετρος.}$$

Εάν  $z_1, z_2$  είναι οι ρίζες της εξίσωσης  $f(z) = 0$ , όπου  $z_1, z_2$  δεν είναι πραγματικοί αριθμοί.

**(i)** Να βρείτε τις δυνατές τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**(ii)** Να αποδείξετε ότι ο  $u = z_1^{2009} + z_2^{2009}$  είναι πραγματικός.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**(iii)** Να υπολογίσετε τα μέτρα των  $z_1, z_2$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

(iv) Εάν  $\frac{z_1}{z_2} + \frac{z_2}{z_1} = -2$ , να υπολογίσετε τη παράμετρο  $\lambda$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(v) Για  $\lambda = 0$ , να βρείτε τον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού  $w$  στο μιγαδικό επίπεδο για τον οποίο ισχύει

$$|w - z_1| + |w - z_2| = 10.$$

Εάν  $w_1, w_2$  είναι δύο διαφορετικοί μιγαδικοί του ανωτέρου γεωμετρικού τόπου, με εικόνες συμμετρικές ως προς την αρχή των αξόνων, να υπολογίσετε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του  $|w_1 - w_2|$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

### ΘΕΜΑ 3°

Θεωρούμε τη δυο φορές παραγωγίσιμη συνάρτηση

$f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f(0) = 0$  και

$$x \cdot f''(x) > f'(x), \text{ για κάθε } x > 0.$$

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f'(x)}{x} \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

(ii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x > 0$  υπάρχει τουλάχιστον ένα  $\xi \in (0, x)$ :  $2f(x) \cdot \xi = x^2 \cdot f'(\xi)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

(iii) Να μελετήσετε, στο  $(0, +\infty)$  ως προς τη μονοτονία την συνάρτηση

$$h(x) = \frac{f(x)}{x^2}.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

(iv) Να λυθεί η ανίσωση  $x^2 \cdot f(x) > f(x^2)$  στο  $(0, +\infty)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

**A.** Θεωρούμε τη συνεχή συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  καθώς και τις

$$F(x) = \int_1^x f(t) dt \quad \text{και}$$

$$g(x) = \int_0^x F(u) du + e^x - 1 \geq 0, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να αποδείξετε ότι  $\int_0^1 f(t) dt = 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $x_0 \in (0, 1)$ :  $\int_0^{x_0} \left( 3f(t) - \frac{1}{t+1} \right) dt = 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

(iii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (0, 1)$ :  $f(\xi) = 6\xi^2 - 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**B.** Θεωρούμε τη μη σταθερή, παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  με  $f'$  συνεχή στο  $\mathbb{R}$  και  $f(0) = 0$ , για την οποία ισχύει

$$\int_0^x \left( \int_0^{f(t)} e^{-u} \cdot f'(u) du \right) dt = 2009x^2 + \int_0^x (f(t) - 4018t) dt, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να μελετηθεί η συνάρτηση  $g(x) = x^2 - x + f(x)$ ,  $x \in \mathbb{R}$  ως προς τη μονοτονία – ακρότατα.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

(ii) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη  $g$ , τον άξονα  $x'x$  και την ευθεία  $x = 1$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**



# ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ Α. ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2010

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & Β΄ ΚΥΚΛΟΥ ΕΠΑ.Λ

ΔΕΥΤΕΡΑ 19 ΑΠΡΙΛΙΟΥ 2010

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ 1<sup>ο</sup>

Α. Θεωρούμε τη συνάρτηση  $f(x) = \sqrt{x}$ ,  $x \in [0, +\infty)$ .

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  και ισχύει

$$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 12

Β. Να διατυπωθεί το Θεώρημα Bolzano (**μονάδες 3**) και το Θεώρημα Ενδιάμεσων Τιμών (**μονάδες 3**), για κάθε Θεώρημα, να σχεδιάσετε στο πίσω μέρος του τετραδίου σας (millimetre), τη γεωμετρική – γραφική του ερμηνεία (**μονάδες 2**).

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

Γ. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος*

1. Εάν η σύνθεση  $fo g$  είναι «1-1» τότε η  $g$  είναι «1-1».

ΜΟΝΑΔΑ 1

2. Εάν η  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[a, \beta]$  με  $f(a) = a$  και  $f(\beta) = \beta$ , τότε υπάρχει  $\xi \in (a, \beta)$ :  $f'(\xi) = 2$ .

ΜΟΝΑΔΑ 1

3. Εάν  $f, g$  αμφότερες γνησίως φθίνουσες σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η σύνθεση  $f \circ g$  είναι επίσης γνησίως φθίνουσα στο  $\Delta$ .

ΜΟΝΑΔΑ 1

4. Εάν  $z_1, z_2$  είναι δύο μιγαδικοί με μέτρο 1 και

$$w = \frac{z_1 z_2 + z_1 + z_2 - 1}{z_1 + z_2 - z_1 z_2 + 1}, \text{ τότε } |w| = 2.$$

ΜΟΝΑΔΑ 1

5. Εάν  $f$  μια συνεχής και γνησίως αύξουσα συνάρτηση στο διάστημα  $[0,1]$  για την οποία ισχύει  $f(0) > 0$ .

Δίνεται επίσης συνάρτηση  $g$  συνεχής στο διάστημα  $[0,1]$  για την οποία ισχύει  $g(x) > 0$ , για κάθε  $x \in [0,1]$ .

$$\text{Εάν } F(x) = \int_0^x f(t) \cdot g(t) dt, x \in [0,1] \text{ τότε}$$

$$F(x) > 0, \text{ για κάθε } x \text{ στο διάστημα } (0,1].$$

ΜΟΝΑΔΑ 1

## ΘΕΜΑ 2°

Δίνονται οι μιγαδικοί αριθμοί

$$w_1 = 1 - i \text{ και } w_2 = 1 + 2i.$$

(i) Να υπολογίσετε τον μιγαδικό

$$w = w_1^2 + w_2^2.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(ii) Θεωρούμε τη μιγαδική συνάρτηση

$$f(z) = \frac{z+1}{z-i}, z \neq i.$$

(α) Να υπολογίσετε τη τιμή του  $f(w)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

(β) Εάν  $f(z)$  φανταστικός, να βρεθεί ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του  $z$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(γ) Εάν  $|f(f(z))| = 1$ , να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 7

(iii) Εάν ο μιγαδικός  $z_1$  ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (iiβ) και ο μιγαδικός  $z_2$  ανήκει στον γεωμετρικό τόπο του ερωτήματος (iiγ), να βρείτε την ελάχιστη και τη μέγιστη τιμή του  $|z_1 - z_2|$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

**ΘΕΜΑ 3°**

Θεωρούμε παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f:(0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  με

$$f(1) = 0 \text{ και } f'(1) = 1,$$

για την οποία ισχύει

$$f(x \cdot y) \leq x \cdot f(y) + y \cdot f(x), \text{ για κάθε } x, y \in (0, +\infty).$$

(i) Να αποδείξετε ότι  $f(x) = x \cdot \ln x$ ,  $x > 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

(ii) Να μελετήσετε την  $f$  ως προς τη μονοτονία, ακρότατα και να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της  $f$  στο  $M(1, f(1))$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(iii) Να αποδείξετε ότι

$$x \cdot \ln x > x - 1, \text{ για κάθε } x \in (1, +\infty).$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

(iv) Εάν  $x_2 > x_1 > 0$ , να αποδείξετε ότι

$$x_1^{x_1} \cdot x_2^{x_2} > \left( \frac{x_1 + x_2}{2} \right)^{x_1 + x_2}$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 8

(v) Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την γραφική παράσταση της  $f$ , τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = \frac{1}{e}$ ,  $x = e$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

**ΘΕΜΑ 4<sup>ο</sup>**

**A.** Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα  $I = \int_1^2 \left( \int_3^4 \frac{1}{(x+t)^2} dt \right) dx$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**B.** Δίνεται συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $[α,β]$  με  $f(α) < 0$  και

$$\int_{\alpha}^{\beta} f(t) dt > 0.$$

Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (\alpha, \beta)$ :  $f(\xi) = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**Γ.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$H(x) = \int_{x^2}^{x^3} \frac{1}{\ln t} dt.$$

(i) Να βρεθεί το πεδίο ορισμού της  $H(x)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

(ii) Να μελετηθεί η  $H(x)$  ως προς τη μονοτονία – ακρότατα.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

# ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ Α. ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2011

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & Β΄ ΟΜΑΔΑΣ ΕΠΑ.Λ.

Σάββατο 9 Απριλίου 2011

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ΄ ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ Α

**A<sub>1</sub>.** Θεωρούμε τις παραγωγίσιμες στο  $x_0$  συναρτήσεις  $f, g$  τότε να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f + g$  είναι παραγωγίσιμη στο  $x_0$  και ισχύει

$$(f + g)'(x_0) = f'(x_0) + g'(x_0).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 10**

**A<sub>2</sub>.** Έστω μία συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ . Πότε λέμε ότι η  $f$  στρέφει τα κοίλα κάτω ή είναι κοίλη στο  $\Delta$ ;

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**A<sub>3</sub>.** Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη *Σωστό* ή *Λάθος*

**1.** Εάν η  $f$  δεν είναι «1-1» σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , τότε η  $f$  δεν είναι γνησίως μονότονη στο  $\Delta$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**2.** Εάν η συνάρτηση  $g$  είναι παραγωγίσιμη, γνησίως μονότονη στο  $\mathbb{R}$  και η γραφική παράσταση της διέρχεται από τα σημεία

$$M_1(-1, 2011) \text{ και } M_2(2, 2012)$$

τότε  $g'(x) > 0$ , για κάθε  $x \in \mathbb{R}$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

3. Εάν η μιγαδική εξίσωση

$$z^2 + \alpha z + \beta = 0,$$

έχει δύο ρίζες  $z_1, z_2$  ισχύουν

$$z_1 + z_2 = -\beta \quad \text{και} \quad z_1 \cdot z_2 = \alpha.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Έστω οι συναρτήσεις  $f, g, h$  για τις οποίες

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x), \text{ για κάθε κοντά } x \text{ στο } x_0 \text{ και}$$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} h(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x), \text{ τότε } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \lim_{x \rightarrow x_0} g(x).$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. Εάν η  $f$  συνεχής στο  $[0, 2011]$ , τότε

$$2011 \int_0^1 f(2011t) dt = \int_0^{2011} f(t) dt.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς  $z, w$  για τους οποίους ισχύει

$$izw + 2w = z + 2i \quad \text{και} \quad |(1 + 2i)z + 4 - 2i| = 2\sqrt{5}.$$

**B<sub>1</sub>.** Δίνονται οι αριθμοί

$$z_1 = 1 - 4i \quad \text{και} \quad z_2 = -2 + 2i,$$

να προσδιορίσετε ποιος από  $z_1, z_2$  ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$ , δίνεται ο πίνακας

<b>A.</b>	Η εικόνα A του $z_1$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z$
<b>B.</b>	Η εικόνα B του $z_2$ ανήκει στο γεωμετρικό τόπο των εικόνων του $z$

Γράψτε στο τετράδιο σας, το γράμμα που αντιστοιχεί στη σωστή απάντηση.

ΜΟΝΑΔΑ 2

**B<sub>2</sub>.** Να προσδιορίσετε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του  $z$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**B<sub>3</sub>.** Να προσδιορίσετε τη μεσοκάθετο του τμήματος AB, που ορίζουν οι εικόνες των A ( $z_1$ ) και B ( $z_2$ ).

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**B<sub>4</sub>.** Να βρείτε τη μέγιστη απόσταση της εικόνας του  $z$ , από τη μεσοκάθετο του τμήματος AB, που υπολογίσατε στο ερώτημα (**B<sub>3</sub>**).

(Δίνεται  $\sqrt{20} \approx \frac{9}{2}$ )

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

**B<sub>5</sub>.** Εάν  $u = \frac{z+\bar{z}}{w+\bar{w}}$ , να αποδείξετε ότι η εικόνα του  $u$  κινείται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = 3(x^2 - 2x - 2)e^x - (x^3 - 12x - 18) \quad \text{όπου } x \in \mathbb{R}$$

**Γ<sub>1</sub>.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και να υπολογίσετε τα ακρότατα της.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

**Γ<sub>2</sub>.** Να αποδείξετε την ανίσωση

$$3(x^2 - 2x - 2)e^x \geq x^3 - 12x + 16 - 6e^2, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**Γ<sub>3</sub>.** Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (-2, 2)$ :  $f'''(\xi) = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

**Γ<sub>4</sub>.** Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

**Γ<sub>5</sub>.** Να υπολογίσετε το εμβαδόν του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της  $f$  τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = -1$  και  $x = 0$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

**Δ<sub>1</sub>.** Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = (\sqrt{x^2+1} - x) \cdot \sin x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(i) Να υπολογίσετε το όριο  $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(ii) Εάν  $A = \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$  και για την  $f$  ισχύει

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{-x} f(t) dt + \int_{\frac{\pi}{2}}^x f(t) dt = A, \quad \text{για κάθε } x \in (-\pi, \pi)$$

Να υπολογίσετε το ολοκλήρωμα

$$I = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \left( \int_{\frac{\pi}{2}}^x \left[ (\sqrt{t^2+1} - t) \cdot \sin t \right] dt \right) dx.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**Δ<sub>2</sub>.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  συνεχή στο  $[0, +\infty)$  η γραφική παράσταση της οποίας βρίσκεται εξ' ολοκλήρου πάνω από τον άξονα των  $x$ , για κάθε  $x \in (0, +\infty)$ .

(i) Να αποδείξετε ότι υπάρχουν  $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in (0, 2014)$  ώστε

$$\int_0^{2014} f(t) dt = f(\xi_1) + f(\xi_2) + 2012f(\xi_3).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

(ii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^x \left( \int_0^u f(t) dt \right) du < \int_0^x x \cdot f(t) dt, \quad \text{για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

(iii) Να αποδείξετε ότι

$$\int_0^{2011} \left( \int_0^u 2012f(t) dt \right) du < \int_0^{2012} \left( \int_0^u 2011f(t) dt \right) du.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**



# ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ Α. ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2012

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & Β' ΟΜΑΔΑΣ ΕΠΑ.Λ.

Μεγάλη Δευτέρα 9 Απριλίου 2012

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΤΕΣΣΕΡΙΣ (4)

## ΘΕΜΑ Α

A<sub>1</sub>. Εάν  $f$  είναι μια συνεχής συνάρτηση σε ένα διάστημα  $\Delta$  και  $\alpha$  είναι ένα σημείο του  $\Delta$ , τότε η συνάρτηση  $F(x) = \int_{\alpha}^x f(t) dt, x \in \Delta$ , είναι μια παράγουσα της  $f$  στο  $\Delta$ , να αποδείξετε ότι

$$\left( \int_{\alpha}^x f(t) dt \right)' = f(x), \text{ για κάθε } x \in \Delta.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

A<sub>2</sub>. Πότε μια συνάρτηση ονομάζεται κυρτή και πότε μια συνάρτηση ονομάζεται ή κοίλη;

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A<sub>3</sub>. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος

1. Εάν η  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ , με  $f'(x) \neq 0$ , για κάθε  $x \in \Delta$ , τότε η  $f$  είναι γνησίως μονότονη στο  $\Delta$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

2. Εάν η συνάρτηση  $f$  είναι δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $x_0$ , τότε ισχύει  $\lim_{x \rightarrow x_0} f''(x) = f''(x_0)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

3. Εάν  $\int_a^\beta f(x) dx = \int_a^\beta g(x) dx$ , τότε  $f(x) = g(x)$  για κάθε  $x \in [a, \beta]$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

4. Εάν η  $f$  είναι γνησίως αύξουσα στο  $[a, \beta]$ , τότε η  $f$  δεν έχει ακρότατα στο  $[a, \beta]$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

5. Εάν ισχύει  $z_1^2 + z_2^2 = 0$  τότε και μόνο τότε  $z_1 = z_2 = 0$ , όπου  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μη μηδενικούς μιγαδικούς  $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$ , για τους οποίους ισχύουν

$$|z_1| = 1, \quad |z_2| = 2 \quad \text{και} \quad |z_1 + z_2| = 3.$$

(i) Να αποδείξετε ότι  $\frac{1}{z_1} + \frac{4}{z_2} = \frac{9}{z_1 + z_2}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

(ii) Θεωρούμε επίσης τις συναρτήσεις

$$f(x) = |z_1 + xz_2| + |z_1 - xz_2|, \quad x \in \mathbb{R} \quad \text{και}$$

$$g(x) = 4\operatorname{Re}(z_1 \bar{z}_2)x^3 + x + 1, \quad x \in \mathbb{R}.$$

(α) Να μελετηθεί η  $g$  ως προς τη μονοτονία στο  $\mathbb{R}$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

(β) Να αποδείξετε ότι οι γραφικές παραστάσεις των  $f, g$  τέμνονται σ' ένα τουλάχιστον σημείο στο  $(0, 1)$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 6

(γ) Να αποδείξετε ότι η  $f$  δεν είναι «1-1» στο  $\mathbb{R}$  και στη συνέχεια να αποδείξετε ότι υπάρχει πραγματικός αριθμός  $\xi$  τέτοιος ώστε να ισχύει  $f'(\xi) = 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 3

(δ) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $g$  είναι «1-1» και στη συνέχεια να υπολογίσετε τα ολοκλήρωμα

$$I_1 = \int_1^{10} g^{-1}(t) dt \quad \text{και} \quad I_2 = \int_{-1}^1 f(t) dt.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

**ΘΕΜΑ Γ**

Γ<sub>1</sub>. Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $[0, +\infty)$  με  $f(0) = 0$ , επίσης η  $f$  είναι κοίλη στο  $(0, +\infty)$ , εάν ισχύει

$$(x+1) \cdot f(x) + 2012g(x) = x \cdot f(x+1), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

(i) Να αποδείξετε ότι η  $g$  συνεχής στο  $(0, +\infty)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi \in (1, 2)$ :

$$(\xi - 2) \cdot g(\xi) = 2012^\xi \cdot (\xi - 1).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 8**

Γ<sub>2</sub>. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = \frac{x^3}{3} - \frac{5x^2}{4} + 2x + \frac{1}{2}(x^2 - 2x) \cdot \ln x, \quad x > 0$$

(i) Να υπολογίσετε το όριο

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{2012e^{-x} + \eta \mu 2x}{f(x)}.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

(ii) Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθούν τα ακρότατα της.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

(iii) Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης  $f(x) = \alpha$ , εάν ισχύει  $-2012 < \alpha < 2012$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**ΘΕΜΑ Δ**

Δ<sub>1</sub>. Θεωρούμε τη παραγωγίσιμη συνάρτηση  $f: [0, +\infty) \rightarrow \mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$x \cdot f'(x) > f(x), \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty).$$

(i) Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση

$$g(x) = \frac{f(x)}{x} \text{ είναι γνησίως αύξουσα στο } (0, +\infty).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**

(ii) Να αποδείξετε ότι, για κάθε  $x > 0$  υπάρχει ένα τουλάχιστον  $\xi \in (0, x)$ :

$$\int_0^x 2f(t) \cdot \xi \, dt = x^2 \cdot f(\xi).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

(iii) Να μελετήσετε, στο  $(0, +\infty)$  ως προς την μονοτονία τη συνάρτηση

$$h(x) = \int_0^x \frac{f(t)}{x^2} dt.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

(iv) Να λυθεί η ανίσωση  $\int_0^x x^2 \cdot f(t) dt > \int_0^{x^2} f(t) dt$  στο  $(0, +\infty)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

**Δ<sub>2</sub>.** Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  συνεχή στο διάστημα  $[0, 2]$ , για την οποία ισχύει

$$f(x) + 2f(2-x) = x^3 + x, \text{ για κάθε } x \in [0, 2].$$

(i) Να βρείτε την εξίσωση της εφαπτομένης της συνάρτησης

$$G(x) = \int_0^x f(t) dt \text{ στο σημείο της } M(2, G(2)).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

(ii) Να αποδείξετε ότι υπάρχει  $\xi, x_0 \in (0, 2)$ :

$$G(\xi) = 2 - \xi \quad \text{και} \quad (2 - \xi)f(x_0) = \xi.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

# ΔΙΑΜΑΝΤΗΣ Α. ΤΣΕΚΟΥΡΑΣ

ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ ΠΡΟΣΟΜΟΙΩΣΗΣ

ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΩΝ 2013

ΓΕΝΙΚΟΥ ΛΥΚΕΙΟΥ & Β΄ ΟΜΑΔΑΣ ΕΠΑ.Λ.

Τρίτη 2 Απριλίου 2013

ΕΞΕΤΑΖΟΜΕΝΟ ΜΑΘΗΜΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ:

ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

ΣΥΝΟΛΟ ΣΕΛΙΔΩΝ: ΠΕΝΤΕ (5)

## ΘΕΜΑ Α

A<sub>1</sub>. Θεωρούμε τη συνάρτηση

$$f(x) = x^v, v \in \mathbb{N} - \{0, 1\}.$$

Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση  $f$  είναι παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  και ισχύει

$$f'(x) = v x^{v-1}.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 10

A<sub>2</sub>. Να διατυπώσετε τον ορισμό της οριζόντιας ασύμπτωτης της γραφικής παράστασης μιας συνάρτησης  $f$  στο  $+\infty$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

A<sub>3</sub>. Να χαρακτηρίσετε τις προτάσεις που ακολουθούν, γράφοντας στο τετράδιό σας την ένδειξη Σωστό ή Λάθος

6. Έστω μια συνάρτηση  $f$  συνεχής σ' ένα διάστημα  $\Delta$  και παραγωγίσιμη στο εσωτερικό του  $\Delta$ , θα λέμε ότι η συνάρτηση  $f$  στρέφει τα κοίλα προς τα άνω ή είναι κυρτή στο  $\Delta$ , εάν η  $f$  είναι γνησίως φθίνουσα στο εσωτερικό του  $\Delta$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

7. Έστω μια συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη σ' ένα διάστημα  $\Delta$ . Εάν η  $f$  δεν είναι «1-1» στο  $\Delta$  υπάρχει  $x_0 \in \Delta$  ώστε  $f'(x_0) = 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

8. Εάν η  $f$  συνεχής στο  $[α,β]$ , ισχύει

$$\left( \int_{\alpha}^{\beta} f(x-t) dt \right)' = f(x-\alpha) - f(x-\beta).$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

9. Εάν  $A(x_1, y_1)$  και  $B(x_2, y_2)$ ,  $O(0,0)$  είναι οι εικόνες των μιγαδικών  $z_1 = x_1 + y_1 i$ ,  $z_2 = x_2 + y_2 i$ , τότε  $OA \perp OB$ , τότε ισχύει  $\operatorname{Re}(z_1 \cdot \bar{z}_2) \neq 0$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

10. Εάν η  $f$  έχει πεδίο ορισμού το  $\mathbb{R}$ , τότε δεν έχει κατακόρυφη ασύμπτωτη.

ΜΟΝΑΔΕΣ 2

### ΘΕΜΑ Β

Θεωρούμε τους μιγαδικούς αριθμούς  $z$ ,  $w$  και  $u$  για τους οποίους ισχύει

$$(2z + 3 + i) \cdot (2\bar{z} + 3 - i) + |(1 + i)w + 1 + 2i| i = 36 + i\sqrt{2}$$

και

$$u = \lambda + \mu i + \frac{4}{\lambda + \mu i} \quad \text{με } \lambda, \mu \in [-\sqrt{2}, \sqrt{2}] \text{ και}$$

$$\mu^2 = (\sqrt{2} - \lambda)(\sqrt{2} + \lambda).$$

**B<sub>1</sub>.** Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων των μιγαδικών  $z$ ,  $w$  και  $u$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**B<sub>2</sub>. (i)** Να αποδείξετε ότι

$$|u|^2 + |u^2 - 16| = 20.$$

ΜΟΝΑΔΕΣ 5

**(ii)** Να βρείτε τη μέγιστη και ελάχιστη τιμή του μέτρου  $|z - w|$ .

ΜΟΝΑΔΕΣ 4

**B<sub>3</sub>.** Επίσης θεωρούμε τους μιγαδικούς  $u_1, u_2$  για τους οποίους ισχύει ότι

- η εικόνα του  $u_1$  κινείται πάνω στην ευθεία

$$(\varepsilon_1): 10x - 2y + 5 = 0 \text{ και}$$

- ισχύει η ισότητα

$$u_2 = (1 + i)u_1 + \bar{u}_1.$$

(i) Να βρείτε την ευθεία  $(\varepsilon_2)$  πάνω στην οποία κινείται η εικόνα του μιγαδικού  $u_2$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

(ii) Να βρείτε τη σχετική θέση των γεωμετρικών τόπων των μιγαδικών  $z, w$  με τον γεωμετρικό τόπο του μιγαδικού  $u_2$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

(iii) Να βρείτε την ελάχιστη τιμή των

$$|z - u_2| \text{ και } |w - u_2|.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

### ΘΕΜΑ Γ

Θεωρούμε τις συναρτήσεις

$$f(x) = 4x^2 \ln x - \frac{4}{3}x^3 - 2x^2 + 4x + 5, x \in (0, +\infty).$$

$$g(x) = x^3 + \lambda x - 6x \cdot \ln x, x \in (0, +\infty) \text{ με } \lambda \in \mathbb{R}.$$

**Γ<sub>1</sub>.** Να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη κυρτότητα στο  $(0, +\infty)$ , επίσης να μελετηθεί η  $f$  ως προς τη μονοτονία και να βρεθεί το ακρότατο της.

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

**Γ<sub>2</sub>.** Να βρείτε το πλήθος των ακροτάτων της  $g$  για τις διάφορες τιμές της παραμέτρου  $\lambda$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 7**

**Γ<sub>3</sub>.** Να υπολογίσετε τα όρια

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} [f(x) \cdot f'(x) \cdot f''(x)] \text{ και } \lim_{x \rightarrow +\infty} (g(x) \cdot f(x) \cdot \eta_{\frac{1}{f(x)}}).$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**Γ<sub>4</sub>.** Να βρεθεί το πλήθος των ριζών της εξίσωσης

$$12x^2 \cdot \ln x = 4x^3 + 6x^2 - 12x - 15.$$

**ΜΟΝΑΔΕΣ 5**

Γ<sub>5</sub>. Για  $\lambda = 4$ , να υπολογίσετε το εμβαδόν  $E$  ( $\Omega$ ) του επίπεδου χωρίου που περικλείεται από την  $g$  τον άξονα των  $x$  και τις ευθείες  $x = 1$  και  $x = e$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

**ΘΕΜΑ Δ**

Θεωρούμε συνάρτηση  $f$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  για την οποία ισχύει

$$\int_1^2 (f(t) + 2e^2) dt = 2e$$

και

$$e^{-x} \cdot x \cdot f'(x) + (x + 1)^2 \geq 1, \text{ για κάθε } x \in \mathbb{R}.$$

καθώς επίσης και τη δύο φορές παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$  συνάρτηση

$$H(x) = \begin{cases} \int_1^x g(t) dt - \frac{(x-1)^2}{2} - \frac{x-1}{3} + 2015\mu, & x \neq 1 \\ 2015\mu^2, & x = 1 \end{cases},$$

για την οποία ισχύουν

$$3H'(1) = H''(1) = 2, \text{ όπου } \mu \in (0, +\infty)$$

και  $g$  παραγωγίσιμη στο  $\mathbb{R}$ .

Δ<sub>1</sub>. Να αποδείξετε ότι η εξίσωση

$$\int_1^x \frac{f(t)}{xe^x} dt = e^{-x} f(x) + x,$$

έχει μοναδική ρίζα στο διάστημα  $(1, 2)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

Δ<sub>2</sub>. Εάν  $x_0$  είναι η μοναδική ρίζα του ερωτήματος Δ<sub>1</sub>, να αποδείξετε

ότι υπάρχει  $\xi \in (1, x_0)$  τέτοιο ώστε  $f(\xi) > \frac{x_0 f(x_0)}{x_0 - 1}$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

Δ<sub>3</sub>. Να βρεθεί η τιμή της παραμέτρου  $\mu$ , όταν  $\mu \in (0, +\infty)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 2**



Δ<sub>4</sub>. Να βρείτε την εξίσωση (ε) της εφαπτομένης της γραφικής παράστασης της  $g$  στο σημείο της  $A(1, g(1))$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 3**

Δ<sub>5</sub>. Εάν επίσης δίνεται συνάρτηση  $h$  παραγωγίσιμη στο  $(0, +\infty)$  με  $h(1) = 2017$ , για την οποία ισχύει

$$2g'(x) + h'(x) = 2019 + \frac{1 - \ln x}{x^2}, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

και η ευθεία (ε) που υπολογίσατε στο ερώτημα Δ<sub>4</sub>, εκτός από εφαπτομένη της  $g$  στο σημείο της  $A(1, g(1))$  είναι ταυτόχρονα και ασύμπτωτη της  $g$  στο  $+\infty$ .

(i) Να βρείτε την ασύμπτωτη της  $h$  στο  $+\infty$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 4**

(ii) Εάν επίσης η  $g$  είναι γνησίως φθίνουσα στο  $\mathbb{R}$ , να αποδείξετε ότι η εξίσωση  $h(x) = 0$  έχει μοναδική ρίζα στο  $(0, 1)$ .

**ΜΟΝΑΔΕΣ 6**

**ΚΑΛΗ ΕΠΙΤΥΧΙΑ**

**Για παραγγελίες των βιβλίων 2310610920**

Όλα τα θέματα Προσομοίωσης του Συγγραφέα

**Διαμαντή Α. Τσεκούρα**

θα τα βρείτε στο blog

**[tsekouras-ekdosis.blogspot.com](http://tsekouras-ekdosis.blogspot.com)**



**ΤΣΕΚΟΥΡΑ**  
**Εκδόσεις**

Για παραγγελίες των βιβλίων 2310610920

**ΚΥΚΛΟΦΟΡΗΣΕ**  
**ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΠΟΥ ΠΡΕΠΕΙ**  
**ΝΑ ΔΙΑΒΑΣΟΥΝ**  
**ΟΛΟΙ ΟΙ ΜΑΘΗΤΕΣ Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ**  
**ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ**  
**ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**

Διαμαντής Α. Τσεκούρας

ΣΥΛΛΟΓΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ**  
ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ

Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ

$$F(x) = \int_a^x f(t) dt$$

ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΚΕΨΕΩΝ - ΙΔΕΩΝ  
ΠΟΥ ΘΑ ΣΑΣ ΒΟΗΘΗΣΟΥΝ ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ  
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Περιεχεί  
25 ΛΥΜΕΝΑ & 25 ΑΛΥΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΓΙΑ ΠΡΟΠΑΙΔΕΥΣΗ ΣΕ ΚΑΘΕ ΚΕΦΑΛΑΙΟ  
ΛΥΜΕΝΑ ΓΕΝΙΚΑ - ΣΥΝΔΥΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

**ΓΙΑ ΝΑ ΠΕΤΥΧΟΥΝ ΣΤΙΣ**  
**ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ**  
**ΣΤΑ**  
**ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ**  
*ΘΑ ΤΟ ΒΡΕΙΤΕ ΣΕ ΟΛΑ ΤΑ ΚΑΛΑ ΒΙΒΛΙΟΠΩΛΕΙΑ*  
**Κεντρική Διεύθυνση: ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΗ ΒΙΒΛΙΟΘΗΚΗ**  
**για παραγγελίες 2310 - 263 - 163 & 6938 - 358 - 578**

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΚΑΘΕ ΜΑΘΗΤΗΣ

ΕΝΑ ΒΙΒΛΙΟ ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΕΝΑ ΒΙΒΛΙΟ ΟΔΗΓΟΣ ΓΙΑ ΤΟΥΣ ΚΑΘΗΓΗΤΕΣ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ

ΤΟ ΒΙΒΛΙΟ ΠΟΥ ΧΡΕΙΑΖΕΤΑΙ ΚΑΘΕ ΜΑΘΗΤΗΣ

Νέα έκδοση Μάρτη 2012  
Επανεκδοση Σεπτεμβρίου 2012

Διαμαντή Α. Τσεκούρα

ΣΥΛΛΟΓΗ ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΩΝ ΘΕΜΑΤΩΝ 2

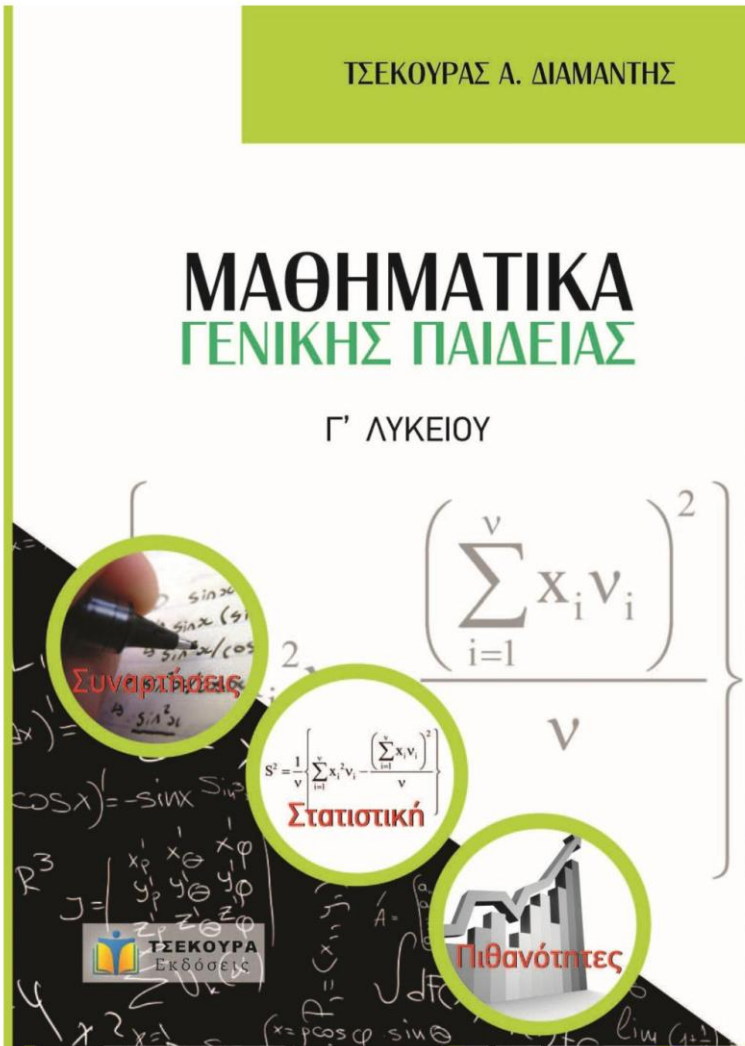
# ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΑ

ΘΕΤΙΚΗΣ - ΤΕΧΝΟΛΟΓΙΚΗΣ ΚΑΤΕΥΘΥΝΣΗΣ  
Γ' ΛΥΚΕΙΟΥ



ΑΝΑΠΤΥΞΗ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΚΕΨΕΩΝ - ΙΔΕΩΝ  
ΠΟΥ ΘΑ ΣΑΣ ΒΟΗΘΗΣΟΥΝ ΝΑ ΛΥΣΕΤΕ  
ΤΑ ΘΕΜΑΤΑ ΤΩΝ ΜΑΘΗΜΑΤΙΚΩΝ ΣΤΙΣ  
ΠΑΝΕΛΛΑΔΙΚΕΣ ΕΞΕΤΑΣΕΙΣ

Περιέχει:  
ΛΥΜΕΝΑ ΓΕΝΙΚΑ - ΣΥΝΔΙΑΣΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ



**Για παραγγελίες των βιβλίων 2310610920**