ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 1

Επιμέλεια : Δημήτριος Σαρ. Πλούγαρης

ΘΕΜΑ 1

Για τον μιγαδικό $z \in C$ δίνεται ότι : $Re(\frac{1}{z}) = \frac{1}{4}$, τότε :

(α) Αν είναι $Im(z) = 1$, να βρείτε το $Re(z)$

(β) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο των εικόνων του z στο μιγαδικό επίπεδο

(γ) Να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου του z

(δ) Αν z_1, z_2 μιγαδικοί αριθμοί για τους οποίους είναι : $Re(\frac{1}{z_1}) = Re(\frac{1}{z_2}) = \frac{1}{4}$, να βρείτε τη μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1 - z_2|$

ΘΕΜΑ 2

Έστω $z \in C^*$ και η συνάρτηση f=f(z) με τύπο : $f(z) = \frac{2z-1}{z^2}$

(α) Να λύσετε την εξίσωση $f(\frac{1}{z}) = 2$ (1)

(β) Να αποδείξετε ότι $f(z) \in R \Leftrightarrow z \in R$ ή $Re(z) = |z|^2$

(γ) Να βρείτε το γεωμετρικό τόπο C των μιγαδικών αριθμών z για τους οποίους ισχύει $f(z) \in R$

(δ) Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης (1) δεν είναι σημεία του C

ΘΕΜΑ 3

Έστω συνάρτηση f=f(x) με τύπο : $f(x) = x + e^x - 1$

A. (i) Να εξετάσετε την συνάρτηση f=f(x) ως προς τη μονοτονία

(ii) Να λύσετε την εξίσωση : $e^x = 1 - x$

B. Δίνετε η συνάρτηση $g : R \to R$ για την οποία για κάθε $x \in R$ ισχύει : $g(x) + e^{g(x)} = 2x + 1$

(i) Να δείξετε ότι $g(0) = 0$

(ii) Να δείξετε ότι η g=g(x) είναι γνησίως αύξουσα

(iii) Να λύσετε την ανίσωση $(gof)(x) > 0$

ΘΕΜΑ 4

Έστω η συνεχής συνάρτηση $f : R \to R$ για την οποία για κάθε $x \in R$ ισχύει :

$$(x-1)f(x) = \alpha x^2 + \beta x - 2,$$

με $\alpha, \beta \in R$. Αν η γραφική παράσταση της συνάρτησης f=f(x) διέρχεται από το σημείο A(1,3)

(α) Να βρείτε τις τιμές των $\alpha, \beta \in R$

(β) Να δείξετε ότι $f(x) = x + 2$, για κάθε $x \in R$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim\limits_{x\to+\infty} f^2(x)\cdot \eta\mu\dfrac{1}{f(x)}$

ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

(α) Έστω ότι ο μιγαδικός z είναι : $z = x + yi$. Επειδή δίνεται $\text{Im}(z) = 1 \Rightarrow y = 1$, τελικά ο μιγαδικός z είναι :

$$z = x + i$$

Οπότε είναι :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+i} = \frac{x-i}{(x+i)(x-i)} = \frac{x-i}{x^2+1} = \frac{x}{x^2+1} - \frac{1}{x^2+1}i$$

Από την υπόθεση είναι :

$$\text{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+1} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 1 = 0 \quad \Rightarrow \quad x = 2 \pm \sqrt{3} = \text{Re}(z)$$

(β) Εφόσον ο μιγαδικός z είναι $z = x + yi$, προκύπτει ότι :

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{x+yi} = \frac{x-yi}{(x+yi)(x-yi)} = \frac{x-yi}{x^2+y^2} = \frac{x}{x^2+y^2} - \frac{y}{x^2+y^2}i$$

Από την υπόθεση είναι :

$$\text{Re}(\frac{1}{z}) = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad \frac{x}{x^2+y^2} = \frac{1}{4} \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + y^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad x^2 - 4x + 2^2 + y^2 = 2^2$$

ή

$$(x-2)^2 + y^2 = 4$$

Δηλαδή, ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων του z είναι κύκλος με κέντρο το $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$

(γ) Εφόσον για τον μιγαδικό z βρήκαμε ότι ο γεωμετρικός του τόπος είναι ο κύκλος με κέντρο το $K(2,0)$ και ακτίνα $\rho = 2$, ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί :

$$|z - (2+0i)| = 2 \quad \Rightarrow \quad |z-2| = 2$$

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα είναι :

$$\big||z| - |-2|\big| \le |z + (-2)| \le |z| + |-2| \quad \Rightarrow \quad \big||z| - 2\big| \le 2 \le |z| + 2$$

Η κάθε μία ανίσοση από τις παραπάνω δίνει :

- ☐ $2 \le |z| + 2 \quad \Rightarrow \quad |z| \ge 0$, το οποίο γνωρίζαμε ότι ισχύει
- ☐ $\big||z| - 2\big| \le 2 \quad \Rightarrow \quad -2 \le |z| - 2 \le 2 \quad \Rightarrow \quad 0 \le |z| \le 4$

δηλαδή, η μέγιστη τιμή του μέτρου του μιγαδικού z είναι 4

(δ) Από τα προηγούμενα ερωτήματα προέκυψε ότι οποιοδήποτε μιγαδικός z τέτοιος ώστε $\mathrm{Re}(\frac{1}{z})=\frac{1}{4}$ ισχύει :

- $|z|\le 4$, επομένως τόσο για τον μιγαδικό z_1 όσο και για τον z_2 ισχύει :

$$|z_1|\le 4 \quad \text{και} \quad |z_2|\le 4$$

- $|z-2|=2$, επομένως τόσο για τον μιγαδικό z_1 όσο και για τον z_2 ισχύει :

$$|z_1-2|=2 \quad \text{και} \quad |z_2-2|=2$$

Ο μιγαδικός αριθμός z_1-z_2 ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί :

$$z_1-z_2=z_1-2+2-z_2+2-2=(z_1-2)+(-z_2+2)$$

Οπότε, σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα είναι :

$$\big||z_1-2|-|-z_2+2|\big|\le|(z_1-2)+(-z_2+2)|\le|z_1-2|+|-z_2+2|$$

ή

$$\big||z_1-2|-|z_2-2|\big|\le|z_1-z_2|\le|z_1-2|+|z_2-2|$$

ή

$$0\le|z_1-z_2|\le 2+2 \quad\Rightarrow\quad 0\le|z_1-z_2|\le 4$$

δηλαδή, η μέγιστη τιμή του μέτρου $|z_1-z_2|$ είναι 4

Θέμα 2

(α) Η δοθείσα συνάρτηση για $z=\frac{1}{z}$ ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί :

$$f(\frac{1}{z})=\frac{2\frac{1}{z}-1}{(\frac{1}{z})^2} \quad\Rightarrow\quad f(\frac{1}{z})=\frac{\frac{2-z}{z}}{\frac{1}{z^2}} \quad\Rightarrow\quad f(\frac{1}{z})=z(2-z)$$

Η εξίσωση που καλούμαστε να λύσουμε είναι :

$$f(\frac{1}{z})=2 \quad\Rightarrow\quad z(2-z)=2 \quad\Rightarrow\quad -z^2+2z-2=0 \quad\overset{\Delta=-4=(2i)^2}{\Rightarrow}\quad \begin{matrix} z_1=1+i \\ z_2=1-i \end{matrix}$$

(β) Εφόσον είναι : $f(z)\in R$, άρα ισχύει :

$$f(z)=\overline{f(z)} \quad\Rightarrow\quad \frac{2z-1}{z^2}=\frac{2\bar{z}-1}{\bar{z}^2} \quad\Rightarrow\quad 2z\bar{z}^2-\bar{z}^2=2z^2\bar{z}-z^2$$

ή

$$2z\bar{z}^2-\bar{z}^2-2z^2\bar{z}+z^2=0 \quad\Rightarrow\quad 2z\bar{z}(\bar{z}-z)-(\bar{z}-z)(\bar{z}+z)=0$$

$$(\bar{z}-z)(2|z|^2-\bar{z}-z)=0$$

ή

$$\bar{z}-z=0 \quad (1) \quad ή \quad 2|z|^2-\bar{z}-z=0 \quad (2)$$

Αν ισχύει η (1) είναι : $\bar{z}=z \quad \Rightarrow \quad z\in Re$. Αν ισχύει η σχέση (2) είναι :

$$2|z|^2=z+\bar{z} \overset{z+\bar{z}=2Re(z)}{\Rightarrow} 2Re(z)=2|z|^2 \quad \Rightarrow \quad Re(z)=|z|^2$$

(γ) Εφόσον δίνεται ότι $f(z)\in Re$, επομένως ισχύουν όλα αποδείξαμε στο παραπάνω ερώτημα, δηλαδή είναι :

- $z=\bar{z} \quad \Rightarrow \quad 2yi=0 \quad \Rightarrow \quad C_1 : y=0$ ο άξονας x΄x
- $Re(z)=|z|^2 \quad \Rightarrow \quad x=x^2+y^2 \quad \Rightarrow \quad x^2-x+(\frac{1}{2})^2+y^2=(\frac{1}{2})^2 \quad \Rightarrow \quad C_2 : (x-\frac{1}{2})^2+y^2=\frac{1}{4}$

  Κύκλος με κέντρο το σημείο $K(\frac{1}{2},0)$ και ακτίνα $\rho=\frac{1}{2}$

(δ) Οι ρίζες της εξίσωσης (1) ήταν : $z_1=1+i$ και $z_2=1-i$, επομένως οι αντίστοιχες εικόνες τους θα είναι :

$$\begin{matrix} A(z_1) \\ B(z_2) \end{matrix} \rightarrow \begin{matrix} A(1,1) \\ B(1,-1) \end{matrix}$$

Τόσο η εικόνα του z_1 όσο και η εικόνα του z_2 δεν βρίσκονται πάνω στον άξονα x΄x άρα δεν είναι σημεία της C_1. Ελέγχουμε αν τα σημεία A και B βρίσκονται πάνω στην C_2 :

- Για $x=1$ και $y=1$ είναι : $(1-\frac{1}{2})^2+1^2=(\frac{1}{2})^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

  Δηλαδή, το σημείο $A(1,1)\notin C_2$
- Για $x=1$ και $y=-1$ είναι : $(1-\frac{1}{2})^2+(-1)^2=(\frac{1}{2})^2+1=\frac{1}{4}+1=\frac{5}{4}$

  Δηλαδή, το σημείο $B(1,-1)\notin C_2$

Επομένως, οι εικόνες της εξίσωσης (1) δεν βρίσκονται πάνω στον γεωμετρικό τόπο των εικόνων του μιγαδικού z.

Θέμα 3

A. (i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης f=f(x) είναι : $A_f=R$. Η παράγωγος της συνάρτησης είναι :

$$f'(x)=e^x+1>0 \quad ,\forall x\in R$$

Επομένως η συνάρτηση f=f(x) στο πεδίο ορισμού της (R) είναι γνησίως αύξουσα.

(ii) Παρατηρούμε ότι η $x = 0$ είναι ρίζα της εξίσωσης αφού :

$$e^0 = 1 - 0 \quad (\text{Ισχύει})$$

Θεωρήσουμε τη συνάρτηση g=g(x) με τύπο : $g(x) = e^x + x - 1$. Από το παραπάνω ερώτημα προέκυψε ότι η συνάρτηση f=f(x) είναι γνησίως μονότονη (γνησίως αύξουσα) και άρα η ρίζα $x = 0$ είναι μοναδική ρίζα της εξίσωσης.

Β. **(i)** Η δοθείσα σχέση για $x = 0$ είναι : $g(0) + e^{g(0)} = 1 \;\Rightarrow\; e^{g(0)} = 1 - g(0)$ **(1)**

Η τελευταία σχέση είναι ισοδύναμη της αντίστοιχης σχέσης του ερωτήματος Β(ii), για την οποία αποδείξαμε ότι μοναδικής της ρίζα είναι η $x = 0$. Άρα και η σχέση (1) έχει ως μοναδική ρίζα το 0, δηλαδή είναι : $g(0) = 0$

(ii) Αν παραγωγίσουμε τη δοθείσα σχέση έχουμε :

$$g'(x) + e^{g(x)} \cdot g'(x) = 2 \;\Rightarrow\; g'(x)(1 + e^{g(x)}) = 2 \;\Rightarrow\; g'(x) = \frac{2}{1 + e^{g(x)}} > 0$$

Δηλαδή, η συνάρτηση g=g(x) είναι συνάρτηση γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

(iii) Η ανίσωση που καλούμαστε να λύσουμε είναι :

$$(gof)(x) > 0 \;\Rightarrow\; g(f(x)) > 0 \;\Rightarrow\; g(f(x)) > g(f(0))$$

Εφόσον είναι : $f(0) = g(0) = 0$

Επειδή η συνάρτηση g=g(x) είναι γνησίως αύξουσα συνάρτηση, άρα θα είναι και ένα προς ένα, δηλαδή η αντίστροφή συνάρτηση της ορίζεται, επομένως :

$$g^{-1}\big(g(f(x))\big) > g^{-1}\big(g(f0))\big) \;\Rightarrow\; f(x) > f(0)$$

Όμως και η συνάρτηση f=f(x) είναι γνησίως αύξουσα άρα και η δική της αντίστροφη συνάρτηση ορίζεται, οπότε :

$$f^{-1}(f(x)) > f^{-1}(f(0)) \;\Rightarrow\; x > 0$$

Θέμα 4

(α) Εφόσον η γραφική παράσταση διέρχεται από το σημείο $A(1,3)$ ισχύει : $f(1) = 3$. Επίσης, από την υπόθεση της άσκησης γνωρίζουμε ότι η συνάρτηση f=f(x) είναι συνεχής στο R, οπότε θα είναι συνεχής και στο $x_0 = 1$, δηλαδή θα ισχύει :

$$\lim_{x \to 1} f(x) = f(1) \overset{f(1)=3}{\Rightarrow} \lim_{x \to 1} f(x) = 3 \in R$$

Από τη δοθείσα σχέση, αν επιλύσουμε ως προς f(x) έχουμε :

$$f(x) = \frac{\alpha x^2 + \beta x - 2}{x - 1}$$

Οπότε, το παραπάνω όριο είναι :

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2+\beta x-2}{x-1} = 3$$

Επειδή είναι : $\lim_{x\to 1}(x-1) = 0$, πρέπει επίσης :

$$\lim_{x\to 1}(\alpha x^2+\beta x-2) = 0 \quad\Rightarrow\quad \alpha+\beta = 2 \quad ή \quad \beta = 2-\alpha \quad \textbf{(1)}$$

Οπότε τελικά το όριο ισοδύναμα γράφεται :

$$\lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2+x(2-\alpha)-2}{x-1} = 3 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\frac{\alpha x^2+2x-\alpha x-2}{x-1} = 3 \quad\Rightarrow\quad \lim_{x\to 1}\frac{\alpha x(x-1)+2(x-1)}{x-1} = 3$$

ή

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x-1)(\alpha x+2)}{x-1} = 3 \quad\Rightarrow\quad \alpha+2 = 3 \quad\Rightarrow\quad \alpha = 1$$

Και τελικά από τη σχέση (1) είναι : $\beta = 1$

(β) Η συνάρτηση f=f(x) για $\alpha = \beta = 1$ ισοδύναμα μπορεί να γραφτεί :

$$f(x) = \frac{x^2+x-2}{x-1} \quad\Rightarrow\quad f(x) = \frac{(x-1)(x+2)}{x-1} \quad\Rightarrow\quad f(x) = x+2$$

(γ) Είναι :

$$f^2(x)\cdot ημ^2\frac{1}{f(x)} = (x+2)^2\cdot ημ\frac{1}{x+2}$$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι :

$$\lim_{x\to+\infty} f^2(x)\cdot ημ\frac{1}{f(x)} = \lim_{x\to+\infty}(x+2)^2\cdot ημ\frac{1}{x+2} = \lim_{x\to+\infty}(x+2)\cdot\frac{ημ\frac{1}{x+2}}{\frac{1}{x+2}}$$

Αν θέσουμε $\frac{1}{x+2} = u$, τότε επειδή $x\to+\infty$ είναι : $u\to\frac{1}{+\infty} \Rightarrow u\to 0^+$, το όριο ισοδύναμα γίνεται :

$$\lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\frac{ημu}{u} = \lim_{u\to 0}\frac{1}{u}\cdot\lim_{u\to 0}\frac{ημu}{u} = +\infty\cdot 1 = +\infty$$