



ΕΠΑΝΑΛΗΠΤΙΚΑ ΘΕΜΑΤΑ

ΜΕΡΟΣ 3

Επιμέλεια : Δημήτριος Σαρ. Πλούγαρης

ΘΕΜΑ 1

(α) Να λύσετε την εξίσωση :

$$z^2 - 2z\sin\theta + 1 = 0, \text{ με } \theta \in [0, 2\pi]$$

(β) Να δείξετε ότι οι εικόνες των ριζών της εξίσωσης βρίσκονται στον μοναδιαίο κύκλο

(γ) Αν z_1, z_2 οι ρίζες της παραπάνω εξίσωσης, να βρείτε το $\theta \in [0, 2\pi]$, ώστε το μέτρο $|z_1 - z_2|$ να παίρνει τη μέγιστη τιμή

ΘΕΜΑ 2

A. Έστω η συνάρτηση $f=f(x)$ με τύπο :

$$f(x) = \ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2}$$

(i) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f=f(x)$ ως προς τη μονοτονία

(ii) Να βρείτε το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f=f(x)$

(iii) Να δείξετε ότι υπάρχει ένα μόνο $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ τέτοιο, ώστε να είναι $f(x_0) = 0$

B. Να δείξετε ότι η γραφική παράσταση της συνάρτησης $g=g(x)$ με τύπο $g(x) = e^x \ln x$ έχει ένα μόνο σημείο καμπής

ΘΕΜΑ 3

Έστω η συνάρτηση $f=f(x)$ με τύπο :

$$f(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} + 2$$

(α) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f=f(x)$ ως προς τη μονοτονία και τα ακρότατα

(β) Να βρείτε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης :

$$2 \ln x = x^3 + x(2\alpha - 4)$$

για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$

(γ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{t \rightarrow +\infty} \int_1^t f(x) dx$



ΘΕΜΑ 4

Δίνεται η συνεχής συνάρτηση $f=f(x)$ με τύπο :

$$f(x) = \begin{cases} \sin^2(\pi x), & 0 \leq x \leq 1 \\ a - \frac{\ln x}{x}, & x > 1 \end{cases}$$

- (α) Να βρείτε την τιμή του $a \in \mathbb{R}$
- (β) Να μελετήσετε την συνάρτηση $f=f(x)$ ως προς μονοτονία και ακρότατα
- (γ) Να υπολογίσετε το εμβαδόν $E(\lambda)$ του χωρίου που περικλείεται από τη γραφική παράσταση της $f=f(x)$ τον άξονα $x'x$ και τις ευθείες $x=0$ και $x=\lambda$ με $\lambda > 1$
- (δ) Να υπολογίσετε το όριο : $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda)$



ΛΥΣΕΙΣ

Θέμα 1

- (α) Πρόκειται για μια δευτεροβάθμια εξίσωση, η διακρίνουσα της οποίας είναι :

$$\Delta = (-2\sigma\eta\theta)^2 - 4 = 4\sigma\eta^2\theta - 4 = -4(1 - \sigma\eta^2\theta) = -4\eta\mu^2\theta = (2i \cdot \eta\mu\theta)^2$$

Οπότε οι ρίζες του τριωνόμου είναι :

$$z_{1,2} = \frac{2\sigma\eta\theta \pm 2i \cdot \eta\mu\theta}{2} \Rightarrow \begin{aligned} z_1 &= \sigma\eta\theta + i \cdot \eta\mu\theta \\ z_2 &= \sigma\eta\theta - i \cdot \eta\mu\theta \end{aligned}$$

- (β) Αν $A(z_1)$ οι εικόνες της ρίζας z_1 , δηλαδή είναι: $A(\sigma\eta\theta, \eta\mu\theta)$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών είναι :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sigma\eta\theta \\ y &= \eta\mu\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= \sigma\eta^2\theta \\ y^2 &= \eta\mu^2\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = \eta\mu^2\theta + \sigma\eta^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Δηλαδή, οι εικόνες του z_1 κινούνται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο

Αν $B(z_2)$ οι εικόνες της ρίζας z_2 , δηλαδή είναι: $A(\sigma\eta\theta, -\eta\mu\theta)$ τότε ο γεωμετρικός τόπος των εικόνων αυτών είναι :

$$\left. \begin{aligned} x &= \sigma\eta\theta \\ y &= -\eta\mu\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow \left. \begin{aligned} x^2 &= \sigma\eta^2\theta \\ y^2 &= \eta\mu^2\theta \end{aligned} \right\} \Rightarrow x^2 + y^2 = \eta\mu^2\theta + \sigma\eta^2\theta \Rightarrow x^2 + y^2 = 1$$

Δηλαδή, και οι εικόνες του z_2 κινούνται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο

- (γ) Τόσο οι εικόνες του z_1 , όσο και οι εικόνες του z_2 κινούνται πάνω στον μοναδιαίο κύκλο, οπότε και για τους δύο μιγαδικούς ισχύει :

$$|z_1| = 1 \quad \text{και} \quad |z_2| = 1$$

Σύμφωνα με την τριγωνική ανισότητα είναι :

$$\left| |z_1| - |-z_2| \right| \leq |z_1 + (-z_2)| \leq |z_1| + |-z_2|$$

Επειδή όμως είναι : $|-z_2| = |z_2| = 1 = |z_1|$, από την παραπάνω διπλή ανισότητα τελικά προκύπτει ότι :

$$0 \leq |z_1 - z_2| \leq 2$$

Δηλαδή είναι : $|z_1 - z_2|_{\max} = 2$. Είναι :

$$z_1 - z_2 = \sigma\eta\theta + i \cdot \eta\mu\theta - \sigma\eta\theta + i \cdot \eta\mu\theta = 2i \cdot \eta\mu\theta$$

Οπότε τελικά είναι :

$$\sqrt{0^2 + (2\eta\mu\theta)^2} = 2 \Rightarrow 2\eta\mu\theta = \pm 2 \Rightarrow \eta\mu\theta = \pm 1$$

$$\square \quad \eta\mu\theta = 1 \Rightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = 2k\pi + \frac{\pi}{2} \quad (k \in \mathbb{Z})$$



Επειδή είναι :

$$\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2\kappa\pi + \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Rightarrow -\frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{3\pi}{2} \Rightarrow -\frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{3}{4} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 0$$

Δηλαδή η ρίζα είναι : $\theta = \frac{\pi}{2}$

$$\square \quad \eta\mu\theta = -1 \Rightarrow \eta\mu\theta = \eta\mu\left(-\frac{\pi}{2}\right) \Rightarrow \theta = 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \quad (\kappa \in \mathbb{Z})$$

Επειδή είναι :

$$\theta \in [0, 2\pi] \Rightarrow 0 \leq \theta \leq 2\pi \Rightarrow 0 \leq 2\kappa\pi - \frac{\pi}{2} \leq 2\pi \Rightarrow \frac{\pi}{2} \leq 2\kappa\pi \leq \frac{5\pi}{2} \Rightarrow \frac{1}{4} \leq \kappa \leq \frac{5}{4} \xrightarrow{\kappa \in \mathbb{Z}} \kappa = 1$$

$$\square \quad \text{Δηλαδή η ρίζα είναι : } \theta = 2\pi - \frac{\pi}{2} \Rightarrow \theta = \frac{3\pi}{2}$$

Θέμα 2

A. (i) Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης είναι : $A_f = (0, +\infty)$ ενώ η παράγωγος είναι :

$$f'(x) = \frac{1}{x} - \frac{2}{x^2} + \frac{2}{x^3} \Rightarrow f'(x) = \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3}$$

Είναι :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow \frac{x^2 - 2x + 2}{x^3} = 0 \Rightarrow x^2 - 2x + 2 = 0 \Rightarrow \Delta < 0$$

Οπότε το τριώνυμο για κάθε $x \in A_f = (0, +\infty)$ είναι θετικό, δηλαδή για κάθε $x \in (0, +\infty)$ είναι

$f'(x) > 0$ και άρα η συνάρτηση $f=f(x)$ γνησίως αύξουσα στο πεδίο ορισμού της

(ii) Το σύνολο τιμών της συνάρτησης $f=f(x)$ είναι :

$$f(A) = \left(\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x), \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) \right) = \mathbb{R}$$

Αφού είναι :

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x^2 \ln x + 2x - 1}{x^2} \stackrel{\text{A.M.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2x \ln x + x + 2}{2x} \stackrel{\text{A.M.}}{=} \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{2 \ln x + 3}{2} = -\infty$$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right) = +\infty + 0 - 0 = +\infty$$

(iii) Η συνάρτηση $f=f(x)$ είναι συνεχής στο $(0, +\infty)$ άρα και στο διάστημα $\left[\frac{1}{2}, 1\right] \subset (0, +\infty)$.

Επίσης είναι :

$$\square \quad f\left(\frac{1}{2}\right) = \ln \frac{1}{2} + 4 - 4 = \ln 1 - \ln 2 = -\ln 2 < 0$$

$$\square \quad f(1) = \ln 1 + 2 - 1 = 1 > 0$$



Δηλαδή, για τη συνάρτηση $f=f(x)$ ισχύει θεώρημα Bolzano, σύμφωνα με το οποίο υπάρχει ένα τουλάχιστον $x_0 \in (\frac{1}{2}, 1)$ τέτοιο, ώστε να είναι : $f(x_0) = 0$. Η ρίζα αυτή είναι μοναδική, διότι η συνάρτηση $f=f(x)$ στο πεδίο ορισμού της είναι γνησίως αύξουσα.

- B.** Αρκεί να δείξουμε ότι η εξίσωση $g''(x) = 0$ έχει μόνο μία ρίζα στο πεδίο ορισμού της δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$. Είναι :

$$g'(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} \quad \text{και} \quad g''(x) = e^x \ln x + e^x \frac{1}{x} + e^x \frac{1}{x} - e^x \frac{1}{x^2} \Rightarrow g''(x) = e^x \left(\ln x + \frac{2}{x} - \frac{1}{x^2} \right)$$

ή

$$g''(x) = e^x f(x) \xrightarrow{g''(x)=0} e^x f(x) = 0 \Rightarrow f(x) = 0$$

Από προηγούμενα ερωτήματα αποδείξαμε ότι η εξίσωση $f(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα στο διάστημα $(\frac{1}{2}, 1)$.

Θέμα 3

- (α)** Το πεδίο ορισμού της συνάρτησης $f=f(x)$ είναι : $A_f = (0, +\infty)$ ενώ η παράγωγος της είναι :

$$f'(x) = \frac{1 - \ln x}{x^2} - x \xrightarrow{f'(x)=0} \frac{1 - \ln x}{x^2} - x = 0 \Rightarrow 1 - \ln x - x^3 = 0$$

Η $x = 1$ είναι προφανής λύση. Θεωρώ συνάρτηση $g=g(x)$ με τύπο : $g(x) = 1 - \ln x - x^3$, η παράγωγος της οποίας είναι :

$$g'(x) = -\frac{1}{x} - 3x^2 < 0, \text{ για κάθε } x \in (0, +\infty)$$

Επομένως, η συνάρτηση $g=g(x)$ στο διάστημα $(0, +\infty)$ είναι γνησίως αύξουσα και άρα η $x = 1$ μοναδική ρίζα της εξίσωσης $g(x) = 0$, δηλαδή μοναδική λύση της $f'(x) = 0$. Ο πίνακας μονοτονίας της $f=f(x)$ είναι :

x	0	1	$+\infty$
$f'(x)$		+	-
$f(x)$			

T.M.

Η συνάρτηση $f=f(x)$ στο διάστημα $(0, 1)$ είναι γνησίως αύξουσα, ενώ στο διάστημα $(1, +\infty)$ είναι γνησίως φθίνουσα. Στο σημείο με $x = 1$ η $g=g(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι :

$$f_{\max} = f(1) = \frac{3}{2}$$

- (β)** Η εξίσωση την οποία καλούμαστε να λύσουμε στο διάστημα που ορίζεται, δηλαδή στο διάστημα $(0, +\infty)$, αν διαιρέσουμε όλους τους όρους με το $2x$ ισοδύναμα προκύπτει :



$$\frac{\ln x}{x} = \frac{x^2}{2} + \alpha - 2 \Rightarrow \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} + 2 - \alpha = 0$$

Θεωρούμε συνάρτηση $h=h(x)$ με τύπο : $h(x) = \frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} + 2 - \alpha$. Από την μονοτονία της $h=h(x)$ θα μπορέσουμε να προσδιορίσουμε το πλήθος των ριζών της εξίσωσης $h(x) = 0$ για τις διάφορες τιμές του $\alpha \in \mathbb{R}$. Το πεδίο ορισμού της $h=h(x)$ είναι : $A_h = (0, +\infty)$ ενώ η παράγωγος της είναι :

$$h'(x) \equiv f'(x)$$

Οπότε είναι : $h'(x) = 0 \Rightarrow f'(x) = 0 \Rightarrow x = 1$ μοναδική ρίζα (από προηγούμενα ερωτήματα).

Ο πίνακας μονοτονίας της $h=h(x)$ είναι :

x	0	1	$+\infty$
$h'(x)$		+	-
$h(x)$			

T.M.

Είναι :

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} h(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{x} \ln x - \frac{x^2}{2} + 2 - \alpha \right) = +\infty \cdot (-\infty) - 0 + 2 - \alpha = -\infty,$$

$$h(1) = \frac{3}{2} - \alpha$$

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} h(x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\frac{\ln x}{x} - \frac{x^2}{2} + 2 - \alpha \right) = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln x}{x} \text{ (DLH)} - \infty + 2 - \alpha = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1}{x} - \infty = -\infty$$

Οπότε διακρίνουμε τις περιπτώσεις :

□ Αν είναι $h(1) < 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \alpha < 0 \Rightarrow \alpha > \frac{3}{2}$, τότε η εξίσωση $h(x) = 0$ δεν έχει καμία ρίζα

τόσο στο διάστημα $(0,1)$ όσο και στο διάστημα $(1,+\infty)$

□ Αν είναι $h(1) = 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{3}{2}$, τότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει μία μόνο ρίζα,

την $x = 1$

□ Αν είναι $h(1) > 0 \Rightarrow \frac{3}{2} - \alpha > 0 \Rightarrow \alpha < \frac{3}{2}$, τότε η εξίσωση $h(x) = 0$ έχει ακριβώς δύο

ρίζες, μία στο διάστημα $(0,1)$ και μία στο διάστημα $(1,+\infty)$

(γ) Υπολογίζουμε το ολοκλήρωμα, το αποτέλεσμα του οποίου ζητάμε να βρούμε το όριο. Οπότε είναι :

$$I = \int_1^t f(x) dx = \int_1^t \left(\frac{1}{x} \ln x - \frac{1}{2} x^2 + 2 \right) dx = \int_1^t (\ln x)' \ln x dx - \frac{1}{2} \int_1^t x^2 dx + 2 \int_1^t dx$$



$$I = \frac{1}{2} [\ln^2 x]_1^t - \frac{1}{6} [x^3]_1^t + 2[x]_1^t \Rightarrow I = \frac{1}{2} \ln^2 t - \frac{1}{6} t^3 + \frac{1}{6} + 2t - 2$$

ή

$$I = \frac{1}{2} \ln^2 t - \frac{1}{6} t^3 + 2t - \frac{11}{6}$$

Οπότε το ζητούμενο όριο είναι :

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I = \lim_{t \rightarrow +\infty} \left(\frac{1}{2} \ln^2 t - \frac{1}{6} t^3 + 2t - \frac{11}{6} \right) = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t \left(\frac{1}{2} \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{6} \frac{t^2}{\ln t} + \frac{2}{\ln t} - \frac{11}{6} t \ln t \right)$$

ή

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I = \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t \left(\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{\ln t}{t} - \frac{1}{6} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{t^2}{\ln t} - \frac{11}{6} \lim_{t \rightarrow +\infty} t \ln t \right)$$

ή

$$\lim_{t \rightarrow +\infty} I = +\infty \left(\frac{1}{2} \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{t} - \frac{1}{6} 2t^3 - \infty \right) = +\infty(-\infty) \Rightarrow \lim_{t \rightarrow +\infty} I = -\infty$$

Θέμα 4

- (α) Εφόσον η συνάρτηση $f=f(x)$ είναι συνεχής στο πεδίο ορισμού της \mathbb{R} (από υπόθεση) άρα θα είναι συνεχής και στο σημείο με $x = 1$, δηλαδή θα ισχύει :

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) \quad (1)$$

Είναι :

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^+} \left(\alpha - \frac{\ln x}{x} \right) = \alpha - \frac{\ln 1}{1} = \alpha$$

$$\square \quad \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1) = \sin^2 \pi = (-1)^2 = 1$$

Από τη σχέση (1) τελικά έχουμε : $\alpha = 1$

- (β) Για κάθε $x \in (0,1)$ η συνάρτηση $f=f(x)$ έχει τύπο : $f(x) = \sin^2(\pi x)$, της οποίας η παράγωγος είναι :

$$f'(x) = 2\sin(\pi x) \cdot (\sin(\pi x))' = 2\sin(\pi x) \cdot (-\eta\mu(\pi x)) \cdot (\pi x)' = -\pi \eta\mu(2\pi x)$$

Οπότε είναι :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\pi \eta\mu(2\pi x) = 0 \Rightarrow \eta\mu(2\pi x) = 0 \Rightarrow \eta\mu(2\pi x) = \eta\mu 0$$

ή

$$\begin{aligned} 2\pi x &= 2k\pi - 0 & x &= k \\ 2\pi x &= 2k\pi + \pi - 0 & x &= k + \frac{1}{2} \quad (k \in \mathbb{Z}) \end{aligned}$$

Επειδή είναι : $x \in [0,1] \Rightarrow 0 \leq x \leq 1$, για την κάθε μία ρίζα έχουμε :

$$\square \quad 0 \leq k \leq 1 \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0, k = 1, \text{ δηλαδή η λύση είναι : } x = 0 \text{ και } x = 1$$



$$\square \quad 0 \leq k + \frac{1}{2} \leq 1 \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq 1 - \frac{1}{2} \Rightarrow -\frac{1}{2} \leq k \leq \frac{1}{2} \xrightarrow{k \in \mathbb{Z}} k = 0$$

δηλαδή η λύση είναι : $x = \frac{1}{2}$

Οπότε ο πίνακας μονοτονίας γι' αυτόν τον κλάδο της $f=f(x)$ είναι :

x	0	1/2	1
f'(x)		-	+
f(x)			

T.E.

Για κάθε $x \in (1, +\infty)$ η συνάρτηση $f=f(x)$ έχει τύπο : $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$, της οποίας η παράγωγος

είναι :

$$f'(x) = -\frac{(\ln x)'x - \ln x(x)'}{x^2} \Rightarrow f'(x) = -\frac{1 - \ln x}{x^2}$$

Οπότε είναι :

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -\frac{1 - \ln x}{x^2} = 0 \Rightarrow 1 - \ln x = 0 \Rightarrow x = e$$

Και ο πίνακας μονοτονίας γι' αυτόν τον κλάδο της $f=f(x)$ είναι :

x	1	e	$+\infty$
f'(x)		-	+
f(x)			

T.E.

Ο συνολικός πίνακας μονοτονίας της συνάρτησης $f=f(x)$ είναι :

x	0	1/2	1	e	$+\infty$
f'(x)		-	+	-	+
f(x)					

T.M. T.E. T.M. T.E.

Δηλαδή :

- \square Για κάθε $x \in (0, \frac{1}{2}) \cup (1, e)$ η συνάρτηση $f=f(x)$ είναι γνησίως φθίνουσα
- \square Για κάθε $x \in (\frac{1}{2}, 1) \cup (e, +\infty)$ η συνάρτηση $f=f(x)$ είναι γνησίως αύξουσα
- \square Στο $x = 0$ η συνάρτηση $f=f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι :

$$f_{\max} = f(0) = 1$$



- Στο $x = \frac{1}{2}$ η συνάρτηση $f=f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο το οποίο είναι :

$$f_{\min} = f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$$

- Στο $x = e$ η συνάρτηση $f=f(x)$ παρουσιάζει τοπικό μέγιστο το οποίο είναι :

$$f_{\max} = f(e) = 1 - \frac{1}{e}$$

(γ) Πρέπει να βρούμε τα πρόσημα της $f=f(x)$ στο πεδίο ορισμού της. Είναι :

- Για κάθε $x \in [0,1]$ είναι $f(x) = \sin^2(\pi x) > 0$

- Για κάθε $x \in (1,+\infty)$ είναι : $f(x) = 1 - \frac{\ln x}{x}$, οπότε :

$$f(x) = 0 \Rightarrow 1 - \frac{\ln x}{x} = 0$$

Σε προηγούμενο ερώτημα προέκυψε ότι ο κλάδος αυτός της $f=f(x)$ παρουσιάζει τοπικό ελάχιστο στο $x = e$, δηλαδή είναι :

$$f(x) \geq f(e) \xrightarrow{f(e)=1-\frac{1}{e}} f(x) > 0, \text{ για κάθε } x \in (1,+\infty)$$

Οπότε το ζητούμενο εμβαδόν είναι :

$$E(\lambda) = \int_0^1 f(x) dx - \int_1^\lambda f(x) dx \Rightarrow E(\lambda) = \int_0^1 \sin^2(\pi x) dx - \int_1^\lambda \left(1 - \frac{\ln x}{x}\right) dx$$

ή

$$E(\lambda) = \int_0^1 \frac{1 + \sin(2\pi x)}{2} dx - \int_1^\lambda dx + \int_1^\lambda (\ln x)' \ln x dx$$

ή

$$E(\lambda) = \frac{1}{2} \int_0^1 dx + \frac{1}{2} \int_0^1 \sin(2\pi x) dx - [x]_1^\lambda + \frac{1}{2} [\ln^2 x]_1^\lambda$$

ή

$$E(\lambda) = \frac{1}{2} [x]_0^1 + \frac{1}{4\pi} [\eta\mu(2\pi x)]_0^1 - [x]_1^\lambda + \frac{1}{2} [\ln^2 x]_1^\lambda \Rightarrow E(\lambda) = -\frac{1}{2} \ln^2 \lambda + \lambda - \frac{1}{2} \quad (\tau.μ.)$$

(δ) Το ζητούμενο όριο είναι :

$$\begin{aligned} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} E(\lambda) &= \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \left(-\frac{1}{2} \ln^2 \lambda + \lambda - \frac{1}{2} \right) = -\frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot \left(\frac{\ln^2 \lambda}{\lambda} - 2 + \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{2} \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \lambda \cdot \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{\ln^2 \lambda}{\lambda} - 2 + \lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lambda} \right) \\ &= -\frac{1}{2} (+\infty) \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2 \ln \lambda}{\lambda} - 2 + 0 \right) = -\frac{1}{2} (+\infty) \left(\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} \frac{2}{\lambda} - 2 \right) \\ &= -\frac{1}{2} (+\infty) (0 - 2) = +\infty \end{aligned}$$