

ΘΕΜΑ 1°

Δίνεται η συνάρτηση f με τύπο : $f(x) = \frac{\sqrt{-x^2 + x + 2}}{x^2 - x}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να βρείτε τα σημεία τομής της με τους άξονες - αν υπάρχουν.
- Αν α, β ρίζες της εξίσωσης: $(x^2 - x) \cdot f^2(x) = 1$, να δείξετε ότι $\alpha\beta + 1 = 0$.

ΘΕΜΑ 2°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = x^2 - (\beta - \alpha)x + 2\beta - \alpha - 2$, $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

- Αν τέμνει τον οριζόντιο άξονα στα σημεία $A(2,0)$ και $B(3,0)$, να βρείτε τα α και β .
- Για $\alpha = -2$ και $\beta = 3$, να βρείτε για ποιες τιμές του x η γραφική παράσταση της συνάρτησης είναι πάνω από τον xx' .
 - Να λύσετε την εξίσωση: $f(|x| - 1) = 6$

ΘΕΜΑ 3°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{\sqrt{4 - x^2}}{|x|}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να δείξετε ότι $f(x) = f(-x)$ για κάθε x που ανήκει στο πεδίο ορισμού της.
- Να δείξετε ότι: $f(a) - f(b) = 0$, όπου a και b ρίζες της εξίσωσης :
 $x^2 - k^2 = 0$, $k \in [-2, 0) \cup (0, 2]$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x ορίζεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x) = f(|x| - 2)$

ΘΕΜΑ 4°

Δίνεται η εξίσωση (ϵ): $x^2 - (a - 2)x + 1 - a = 0$, $a \in \mathbb{R}$. Αν ρ_1, ρ_2 οι ρίζες της (ϵ) και ισχύει ότι : $\rho_2 = 2\rho_1^2$ τότε:

- Να δείξετε ότι έχει δύο ρίζες για κάθε a πραγματικό και να τις εκφράσετε σαν συνάρτηση του a .
- Να υπολογίσετε τα ρ_1, ρ_2 και a .

ΘΕΜΑ 5°

Να λύσετε τις παρακάτω εξισωσανισώσεις:

$$a. (2x - 1)^2 - 3 \cdot |1 - 2x| + 2 \leq 0$$

$$b. 1 - 3|x| = 2x - |1 - x| \qquad c. |x| - 2 \leq |2x - 1|$$

ΘΕΜΑ 6°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \frac{x^2 - |x|}{|x| - 1}$.

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και στη συνέχεια να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- Να αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι άρτια.
- Να λύσετε την ανίσωση: $|f(x) - 2| < 1$

ΘΕΜΑ 7°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $g(x) = \frac{x^2 - |x| - 2}{x^2 - 2|x| - 3}$

- Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
- Να απλοποιήσετε τον τύπο της.
- Να βρείτε τα κοινά σημεία της f με την ευθεία με εξίσωση $y=2$.
- Να βρείτε για ποιες τιμές του x , η γραφική παράσταση της συνάρτησης βρίσκεται πάνω από τον άξονα $\psi\psi'$.

ΘΕΜΑ 8°

Να βρείτε τις τιμές του πραγματικού αριθμού a ώστε η σχέση:

$$(a-3)x^2 - 5x + a - 3 \geq 0, \text{ να ισχύει για κάθε πραγματικό αριθμό } x.$$

ΘΕΜΑ 9°

Δίνονται οι ευθείες με εξισώσεις:
$$\begin{cases} y = 2\lambda^2 x - \lambda - 1, & (\varepsilon) \\ y = -\frac{1}{\lambda^2 + 4}x - \lambda^2 + 1, & (\zeta) \end{cases}$$

- Να δείξετε ότι οι ευθείες δεν μπορεί να είναι παράλληλες για οποιοδήποτε λ .
- Να βρείτε τις τιμές του λ για την οποία οι ευθείες είναι κάθετες.
- Να βρείτε το λ ώστε οι ευθείες να τέμνονται σε σημείο του άξονα $\psi\psi'$, καθώς και το σημείο τομής τους.

ΘΕΜΑ 10°

Δίνονται τα τριώνυμα: $T(x) = x^2 - (\lambda + 3)x + 1$ και $K(x) = x^2 + 2\lambda x + \mu$, $x \in \mathbb{R}$.

- Να βρείτε τις τιμές του λ για τις οποίες το $T(x)$ έχει δύο ίσες ρίζες.
- Να βρείτε τα λ και μ ώστε το $T(x)$ να έχει δύο ίσες ρίζες και το $K(x)$ να έχει δύο άνισες και αντίστροφες ρίζες.
- Για $\lambda = -5$ και $\mu = 1$, να υπολογίσετε τις δύο αντίστροφες ρίζες του $K(x)$.

ΘΕΜΑ 11°

Δίνεται ότι: $-2 < x < 1$ καθώς και οι παραστάσεις:

$$A = |x + 2| - |x - 1| \quad \text{και} \quad B = |2 - x| - |x + 3|$$

- Να απλοποιήσετε τις παραστάσεις A και B .

β. Να λύσετε την εξίσωση $A=B$.

γ. Να αποδείξετε ότι $A \cdot B < 0$, για κάθε $x \neq -\frac{1}{2}$.

ΘΕΜΑ 12°

A. Αν γνωρίζετε ότι : $d(x, -2) < 1$ να δείξετε ότι:

α. $d(x, 0) < 3$ και $d(-6, 3x) < 3$

β. $d(2x, 1) < 7$

B. Αν $d(x, 2y) + d(2x, y-1) = 0$, να δείξετε ότι: $d(x, y) = d(x, -1) = d(y, 0)$.

ΘΕΜΑ 13°

Δίνεται η εξίσωση: $ax^2 - (a+\beta)x - \beta - 2 = 0$, $a \neq 0$, $a \neq -1$. Δίνεται ακόμα ότι μία ρίζα της είναι το 1.

α. Να βρείτε την τιμή του β και να αποδείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες.

β. Να βρείτε την τιμή του a , αν γνωρίζετε επιπλέον ότι: $|\rho_1 + \rho_2| = 2$, όπου ρ_1 και ρ_2 οι ρίζες της αρχικής εξίσωσης.

ΘΕΜΑ 14°

Δίνεται το τριώνυμο: $T(x) = x^2 - (3a+2)x + (a-1)^2$, $a \in \mathbb{R}$.

α. Να βρείτε τη διακρίνουσα σαν συνάρτηση του a .

β. Να βρείτε το a ώστε το $T(x)$ να έχει:

i. Δύο ίσες ρίζες

ii. Δύο άνισες αντίθετες ρίζες.

iii. Δύο άνισες αντίστροφες ρίζες.

iv. Σταθερό πρόσημο και να βρείτε το πρόσημο αυτό.

ΘΕΜΑ 15°

Δίνεται η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 - 2ax + a^2} - \sqrt{x^2 + 2x + 1}$, $a > 0$, της οποίας η γραφική παράσταση διέρχεται από το $A(0,1)$.

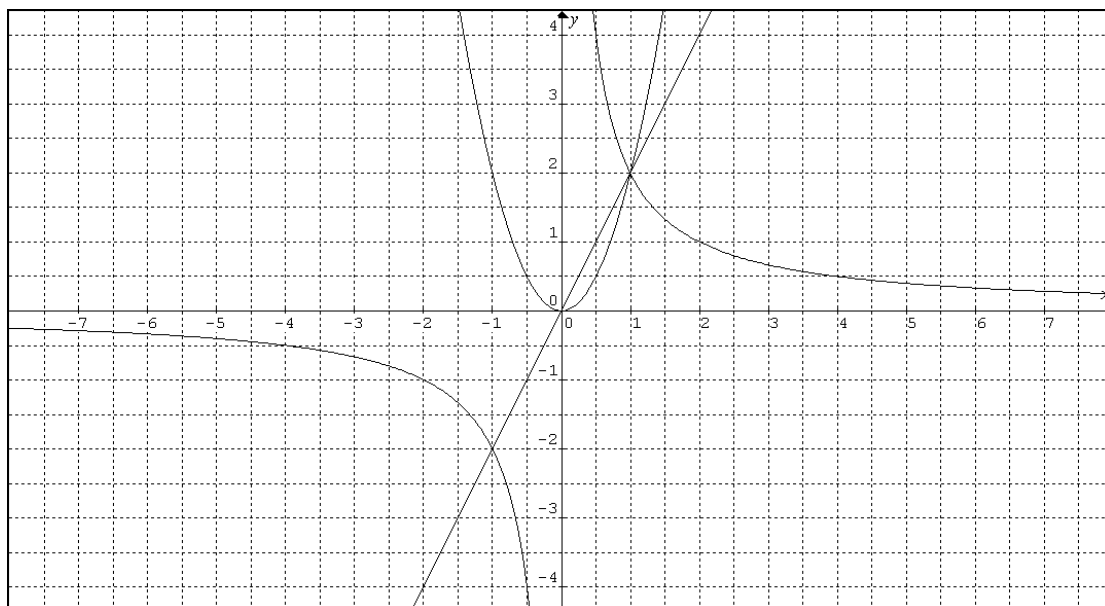
α. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της και να δείξετε ότι $a=2$.

β. Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) > 0$.

γ. Αν $x \in (-1, 2)$, να απλοποιήσετε τον τύπο της συνάρτησης και να δείξετε ότι είναι γνήσια φθίνουσα.

δ. Αν $x \in (0, 2)$, να λύσετε την ανίσωση: $f(\sqrt[3]{x}) \geq f(\sqrt{x})$.

ε. Να αποδείξετε ότι: $f\left(\frac{1}{\sqrt{x^2+1}+x}\right) = f(\sqrt{x^2+1}-x)$ για κάθε $x \in \mathbb{R}$.

ΘΕΜΑ 16°

Στο παραπάνω σχήμα δίνονται οι γραφικές παραστάσεις των συναρτήσεων:

$$f(x) = x^2, \quad g(x) = \frac{2}{x}, \quad h(x) = 2x, \quad x \in \mathbb{R}. \text{ Με τη βοήθεια του σχήματος:}$$

- Να λύσετε τις ανισώσεις : $g(x) < h(x)$ και $f(x) > h(x)$
- Να βρείτε ποιες από τις παραπάνω συναρτήσεις είναι άρτιες και ποιες περιττές.
- Να λύσετε την ανίσωση: $f(x) < 2$
- Να εξηγήσετε για ποιο λόγο η εξίσωση $g(x) = 0$ είναι αδύνατη ενώ η $f(x) = 0$ έχει διπλή ρίζα.

ΘΕΜΑ 17°

Σε ένα σχολείο φοιτούν 200 άτομα. Από τους μαθητές, 150 άτομα μιλούν Αγγλικά, 110 άτομα μιλούν Γαλλικά ενώ 60 άτομα μιλούν μόνο Αγγλικά. Διαλέγουμε ένα μαθητή στην τύχη. Αν επιλέξουμε ένα μαθητή στην τύχη, να βρείτε την πιθανότητα:

- Να μιλά και τις δύο ξένες γλώσσες
- Να μιλά μια τουλάχιστον από τις δύο γλώσσες.
- Να μη μιλά καμιά από τις δύο ξένες γλώσσες.
- Να μιλά ακριβώς μία από τις δύο γλώσσες.

ΘΕΜΑ 18°

Δίνεται το τριώνυμο με τύπο: $f(x) = x^2 + ax + a$, $a \in (0, 3)$

- Να δείξετε ότι το τριώνυμο διατηρεί σταθερό πρόσημο για κάθε $x \in \mathbb{R}$.
- Να βρείτε το a ώστε η εξίσωση : $a \cdot f(x) = (x^2 + a) \cdot (a + 1)$ να έχει δύο ίσες ρίζες.

3. Να βρείτε τις τιμές του a , ώστε η ελάχιστη τιμή του $f(x)$ να είναι τουλάχιστον $\frac{3}{4}$.

ΘΕΜΑ 19°

Δίνεται οι συναρτήσεις: $f(x) = \begin{cases} -x+2, & x < 2 \\ 2x-3, & x \geq 2 \end{cases}$ και $g(x) = \begin{cases} 2, & x < 2 \\ 3, & x \geq 2 \end{cases}$

- α) Να κατασκευάσετε στο ίδιο διάγραμμα τις γραφικές τους παραστάσεις.
 β) Με τη βοήθεια της γραφικής, να λύσετε την εξίσωση $f(x)=g(x)$.
 γ) Με τη βοήθεια της γραφικής, να λύσετε την ανίσωση: $f(x)>g(x)$

ΘΕΜΑ 20°

Δίνεται η αριθμητική πρόοδος για την οποία γνωρίζουμε ότι: $a_4 = -4$, $a_9 = -19$.

- α) Να δείξετε ότι $a_1 = 5$, $\omega = -3$.
 β) Να βρείτε ποιος όρος της προόδου ισούται με -61 .
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $5 + 2 - 1 - 4 - \dots - 61$
 δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $a_2 + a_5 + a_8 + \dots + a_{23}$
 ε) Να βρείτε πόσους το πολύ όρους της προόδου πρέπει να πάρουμε, ώστε το άθροισμά τους να ξεπερνά τον αριθμό (-525) . Δίνεται ότι: $\sqrt{12769} = 113$

ΘΕΜΑ 21°

Δίνονται οι αριθμοί: $-4x, 2x^2, 8$ με $x \in \mathbb{R}$.

- α) Να βρείτε την τιμή του x ώστε να είναι διαδοχικοί όροι αριθμητικής προόδου.
 β) Αν γνωρίζετε ότι ο πρώτος όρος της παραπάνω προόδου είναι ο αριθμός (-64) , να βρείτε ποιοι όροι είναι οι τρεις που δόθηκαν.
 γ) Να υπολογίσετε την τιμή της παράστασης: $a_{11} + a_{12} + a_{13} + \dots + a_{26}$

ΘΕΜΑ 22°

Σε μια γεωμετρική πρόοδο, είναι $a_4 = -24$, $a_9 = 768$.

- α) Να αποδείξετε ότι $a_1 = 3$ και $\lambda = -2$.
 β) Ποιος όρος της προόδου ισούται με 3072 ;
 γ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $3 + (-6) + 12 + (-24) + \dots + 3072$
 δ) Να υπολογίσετε το άθροισμα: $a_1 + a_3 + a_5 + \dots + a_{11}$

ΘΕΜΑ 23°

- α) Να βρείτε την τιμή του x , ώστε οι αριθμοί: $2, x^2, 12 - x^2$ να είναι διαδοχικοί όροι γεωμετρικής προόδου.
- β) Αν ο μεσαίος από αυτούς είναι ο 5^{ος} όρος της προόδου, να βρείτε τον 1^ο όρο της.
- γ) Υπολογίστε το άθροισμα: $a_4 + a_5 + a_6 + \dots + a_{10}$

ΘΕΜΑ 24°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - 2 = -\lambda(x+1), \lambda \in \mathbb{R}. (*)$

1. Να δείξετε ότι η $(*)$ έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε λ .
2. Αν για τις ρίζες x_1, x_2 της $(*)$ ισχύει: $\frac{x_1}{x_2} + \frac{x_2}{x_1} = -3$, να βρείτε το λ .
3. Να βρείτε την εξίσωση με ρίζες τα $x_1 - 1, x_2 - 1$.

ΘΕΜΑ 25°

Έστω η συνάρτηση με τύπο: $f(x) = \sqrt{x^2 - 8x + 16}$

1. Να βρείτε το πεδίο ορισμού της.
2. Να λύσετε την ανίσωση $f(x) \leq 1$
3. Να λύσετε την εξίσωση $f(x) = |2x - 3|$
4. Να βρείτε τους πραγματικούς αριθμούς α και β για τους οποίους ισχύει η σχέση $f(\alpha + \beta) + f(\alpha - \beta) = 0$

ΘΕΜΑ 26°

Δίνεται η παράσταση: $A = \frac{2|k-2|-3}{2} - \frac{|k-2|}{12} - \frac{1}{3}$

1. Για τις τιμές του k που επαληθεύουν την εξίσωση $A=0$, να λυθεί η εξίσωση: $kx^2 - 2kx + k + 1 = 0. (1)$
2. Για τις τιμές του k που επαληθεύουν την ανίσωση $A < 0$, να βρείτε το πλήθος των ριζών της (1) δικαιολογώντας την απάντησή σας.

ΘΕΜΑ 27°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + 2(a+1)x - (a^2 + 2a + 5) = 0$

1. Να δείξετε ότι έχει δύο άνισες ρίζες για κάθε a πραγματικό.
2. Αν γνωρίζετε ότι $|x_1| = |x_2|$, όπου x_1, x_2 ρίζες της εξίσωσης, να υπολογίσετε το a και τις ρίζες της.

ΘΕΜΑ 28°

Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda^2 + \lambda)x^2 + 2(\lambda^2 - 1)x + \lambda^2 - \lambda = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Για ποιες τιμές του λ η εξίσωση είναι πρώτου και για ποιες δεύτερου βαθμού;
- Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο ίσες ρίζες, καθώς και τις ρίζες αυτές.
- Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο άνισες ετερόσημες ρίζες.
- Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αρνητικές ρίζες.
- Να βρείτε το λ ώστε το πρώτο μέλος της εξίσωσης να παίρνει μόνο θετικές τιμές για κάθε πραγματικό αριθμό x .
- Βρείτε - αν υπάρχουν - τιμές του λ για τις οποίες η εξίσωση έχει δύο αντίθετες ρίζες.

ΘΕΜΑ 29°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 - (\lambda + 3)x + \lambda + 4 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$, για την οποία ισχύει ότι το άθροισμα των τετραγώνων των ριζών της ισούται με 13.

Α. Να βρείτε τις ρίζες και το λ , αν επιπλέον γνωρίζετε ότι οι δύο ρίζες της είναι θετικές.

Β. Για τη μεγαλύτερη από τις τιμές του λ που βρήκατε, να λύσετε την ανίσωση:

$$(2x - 1)^2 - \lambda \cdot |2x - 1| - 3 \leq 0$$

ΘΕΜΑ 30°

4. Δίνεται η εξίσωση: $(\lambda - 2)x^2 - \lambda x + 2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R} - \{2\}$

- Να αποδείξετε ότι η εξίσωση έχει δύο ρίζες για κάθε $\lambda \neq 2$
- Αν ρ_1 και ρ_2 (όπου η ρ_2 εξαρτάται από το λ) είναι οι ρίζες της, να βρείτε το λ

ώστε να ισχύει: $\frac{4}{\rho_2^2} + \frac{2}{\rho_1 \rho_2} \leq 2$

ΘΕΜΑ 31°

Δίνεται η εξίσωση: $x^2 + (3\lambda - 2)x + (\lambda - 4)^2 = 0$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

- Να εκφράσετε τη διακρίνουσα ως συνάρτηση του λ και να τη φέρετε σε μορφή γινομένου πρωτοβάθμιων παραγόντων.
- Να βρείτε για ποιες αρνητικές ακέραιες τιμές του λ η εξίσωση είναι αδύνατη.
- Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο θετικές ρίζες.
- Να βρείτε το λ ώστε η εξίσωση να έχει δύο αντίστροφες ρίζες.
- Αν η αρχική εξίσωση έχει δύο ίσες ρίζες, να δείξετε ότι η εξίσωση: $x^2 + (\mu + \lambda^2 + 4\lambda - 12)x + \mu - 1 = 0$, $\mu \in \mathbb{R}$ έχει επίσης πραγματικές ρίζες.